

Ю.В. ЛАПИН

Турбулентный
пограничный слой
в сверхзвуковых
потоках газа



Ю.В. ЛАПИН

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ ГАЗА

Издание второе, переработанное



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

Л а п и н Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. — 2-е изд., перераб. — М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 312 с.

В книге содержатся теоретические и экспериментальные результаты исследований сопротивления, тепло- и массообмена в пристенных турбулентных пограничных слоях при сверхзвуковых скоростях движения газа. Особое внимание уделяется изложению сравнительно простых интегральных методов расчета турбулентных пограничных слоев в высокотемпературных многокомпонентных химически реагирующих смесях газов (диссоциация).

Книга предназначена для инженеров и научных работников, занимающихся проблемами тепло- и массообмена в авиационной и ракетно-космической технике, газодинамических лазерах, атомной энергетике, а также для преподавателей, аспирантов и студентов университетов и технических вузов.

Табл. 17, илл. 92, библи. 230 назв.

Юрий Викторович Л а п и н

**ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ
В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ ГАЗА**

Редактор *А.Г. Мордвицев*

Технические редакторы *Г.И. Астахова, С.В. Геворкян*

Корректор *Т.В. Обод*

ИБ № 11207

Сдано в набор 4.02.82. Подписано к печати 03.11.82 Т — 20906

Формат 60×90/16. Бумага тип 3 Печать офсетная

Усл.печ.л. 19,5. Уч.-изд.л. 21,48. Тираж 2800 экз. Тип. зак. 251

Цена 3 р. 50 к.

Издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы,
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"

630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25

© Издательство "Наука"
Главная редакция
физико-математической литературы
1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.	7
ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.	9
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.	12

Глава 1.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА	17
§ 1. Введение.	17
§ 2. Элементы молекулярной теории газовых потоков	19
§ 3. Газодинамические уравнения переноса, выраженные через векторы плотности потоков	24
§ 4. Скорость диффузии, векторы плотностей потоков и коэффициенты переноса	30
4.1. Вязкость газов и газовых смесей	32
4.2. Диффузия в многокомпонентных и бинарных смесях	36
4.3. Перенос энергии в многокомпонентных газовых потоках	41
§ 5. Уравнения динамики многокомпонентного реагирующего газа	45
5.1. Естественная форма уравнений	45
5.2. Тензорная форма уравнений переноса	48

Глава 2.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ	50
§ 6. Методы осреднения	50
6.1. Понятие турбулентности	50
6.2. Способы описания турбулентных течений сжимаемого газа	51
§ 7. Уравнения турбулентного движения многокомпонентных реагирующих газовых смесей	56
7.1. Уравнение неразрывности для смеси	56
7.2. Уравнение переноса количества движения	56
7.3. Уравнение переноса энергии	58
7.4. Уравнение неразрывности для i -й компоненты	61
7.5. Уравнение состояния	63
7.6. Система уравнений осредненного турбулентного движения многокомпонентной реагирующей смеси газов	63
7.7. Уравнение переноса турбулентных напряжений. Уравнение кинетической энергии турбулентности	64
§ 8. Уравнения турбулентного пограничного слоя в многокомпонентном реагирующем газе	68

8.1. Общие соображения	68
8.2. Стационарное плоское течение.	68
8.3. Осесимметричное течение	72
8.4. Уравнения пространственного турбулентного пограничного слоя	73
8.5. Уравнение кинетической энергии турбулентных пульсаций	73
8.6. Переменные Крокко	74
§ 9. Интегральные соотношения пограничного слоя	77
9.1. Интегральное соотношение импульсов	77
9.2. Интегральное соотношение энергии	80
§ 10. О структуре турбулентного пограничного слоя	81
§ 11. Полуэмпирические гипотезы турбулентности	89
11.1. Формула Буссинеска	89
11.2. Гипотеза локальности механизма турбулентного переноса. Формула Прандтля. Формула Кармана	90
11.3. Взаимодействие процессов молекулярного и турбулентного переноса вблизи твердой поверхности (эффективная вязкость). Модификация формулы Прандтля, предложенная Ван-Дристом. Гипотеза Лойцянского. Гипотеза Совершенного	94
11.4. Некоторые модификации гипотезы Прандтля - Ван-Дриста	99
11.5. Гипотезы турбулентности для внешней области турбулентного пограничного слоя	101
11.6. О полуэмпирических гипотезах турбулентности, используемых для замыкания уравнения кинетической энергии турбулентности и уравнений для вторых моментов	103
11.7. Некоторые проблемы полуэмпирической теории турбулентности	108

Глава 3.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ОДНОРОДНОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ	114
§ 12. Введение. О термодинамических свойствах воздуха при высоких температурах. О структуре третьей главы	114
§ 13. О численных методах интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя в газовых потоках	119
13.1. Исходные уравнения	119
13.2. Эффективная и турбулентная теплопроводность. Эффективное и турбулентное числа Прандтля	120
13.3. Уравнения турбулентного пограничного слоя в физических переменных (постановка задачи)	126
13.4. Уравнения турбулентного пограничного слоя в переменных Дородницына - Лиза (постановка задачи)	127
13.5. Уравнения турбулентного пограничного слоя в переменных Крокко (постановка задачи). Интеграл Крокко	130
13.6. Уравнения турбулентного пограничного слоя в переменных Мизеса (постановка задачи)	132
13.7. О численных методах интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя	133

§ 14. Интегральный полуэмпирический метод расчета трения на гладкой пластине	135
14.1. Общие замечания	135
14.2. Основания метода	136
14.3. Процедура построения метода	137
14.4. Последовательность расчета трения	154
14.5. Профиль скоростей	155
14.6. Результаты расчетов коэффициента трения	158
§ 15. Эмпирический метод расчета трения на плоской пластине . .	161
§ 16. Турбулентный пограничный слой на конусе при нулевом угле атаки	170
§ 17. Турбулентный пограничный слой в газовом потоке при небольших продольных перепадах давления и теплообмене между газом и стенкой (расчет трений)	173
17.1. Предварительные замечания	173
17.2. Метод расчета, основанный на линеаризации интегрального соотношения импульсов	176
17.3. Метод последовательных приближений	183
17.4. Примеры расчета	185
§ 18. Трение на сфере, обтекаемой сверхзвуковым потоком. . .	187
18.1. Общие замечания	187
18.2. Распределение скоростей во внешнем потоке	187
18.3. Расчет трения на сфере	190
18.4. Примеры расчета	191
§ 19. Интегральный двухпараметрический метод расчета трения в турбулентном пограничном слое в несжимаемой жидкости при сильных продольных перепадах давления	193
19.1. Основания метода	193
19.2. Интегральное сращивание по турбулентным касательным напряжениям	194
19.3. Расчет турбулентного пограничного слоя на основе сращивания по интегральным значениям напряжений трения	197
§ 20. Теплопередача в турбулентном пограничном слое в газовом потоке	200
20.1. Общие соображения	200
20.2. Связь между профилями энтальпии и скорости в пограничном слое плоской пластины при $Pr_{\Sigma} \neq 1$. .	201
20.3. Коэффициент восстановления. Параметр аналогии Рейнольдса. Тепловой поток	207
20.4. Расчет теплопередачи на сфере	210

Глава 4.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА НЕПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СПОСОБНОСТЬЮ В ПОТОКАХ ДИССОЦИИРОВАННОГО ГАЗА	214
§ 21. Введение	214
§ 22. Некоторые сведения по кинетике химических реакций	225
22.1. Некоторые определения	225
22.2. Закон действующих масс	226
22.3. Константы равновесия	230
22.4. Константы скоростей гомогенных реакций	231
22.5. Гетерогенные химические реакции	233

22.6.	Кинетика реакций диссоциации и рекомбинации в воздухе	235
22.7.	Граничные условия на каталитической поверхности	242
§ 23.	Свойства идеально диссоциирующего газа	244
§ 24.	Постановка задачи о турбулентном пограничном слое в диссоциирующем газе при произвольной каталитической способности стенки	247
24.1.	Основные уравнения и формальные граничные условия	247
24.2.	Различные режимы течения в пограничном слое; равновесное, замороженное и неравновесное течения. Способы описания состава смеси	251
§ 25.	Граничные условия на затупленных телах, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа	257
25.1.	Расчет параметров потока непосредственно за прямым скачком уплотнения	257
25.2.	Расчет температуры и давления в точке торможения	260
25.3.	Расчет параметров потока вдоль по обводу тела	263
§ 26.	Интегральный метод расчета турбулентного пограничного слоя в диссоциирующем газе	266
26.1.	Исходные предпосылки	266
26.2.	Трение, профиль скоростей, интегральные толщины на плоской пластине. Трение при небольших продольных перепадах давления	267
26.3.	Связь профилей полной энтальпии, концентраций и плотности с профилями скорости. Тепловой поток	269
26.4.	Решение тепловой и диффузионной задач в приближении локального подобия	273
26.5.	Последовательность расчета	278
§ 27.	Применение интегрального метода к расчету течения диссоциирующего воздуха	280
27.1.	О кинетической модели диссоциирующего воздуха	280
27.2.	Другие условия расчета	283
27.3.	Результаты расчетов	284
§ 28.	Исследование свойств турбулентных пограничных слоев в диссоциирующем газе на основе численных методов. Заключение	299
ЛИТЕРАТУРА		303

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Проблема турбулентности вообще и турбулентного пограничного слоя в частности приобрела к настоящему времени, благодаря все возрастающему ее прикладному значению, большую актуальность.

В связи с интенсивным развитием авиации, космонавтики, энергомашиностроения и других отраслей техники особенно большой интерес исследователей и инженеров вызывают проблемы, связанные с движением в турбулентном пограничном слое однородных и неоднородных по составу газов со сверхзвуковыми скоростями. Движение со сверхзвуковыми скоростями во многих случаях приводит к столь значительному повышению температуры газа, что в нем начинают протекать термохимические процессы, приводящие к распаду молекул на атомы, атомов — на ионы и электроны, образованию окислов и других соединений. В некоторых случаях при рассмотрении течений со сверхзвуковыми скоростями необходимо учитывать процессы, происходящие на поверхности обтекаемых тел, например оплавление, сублимацию (испарение), химические реакции и т.д. Многие из перечисленных явлений были и остаются объектом тщательных экспериментальных и теоретических исследований. В предлагаемой книге делается попытка дать систематическое изложение некоторых результатов этих исследований, при этом в теоретическом плане, как правило, предпочтение отдается результатам, полученным на основе полуэмпирической теории турбулентности.

Полуэмпирическая теория турбулентности, как раздел статистической теории турбулентности, до настоящего времени остается важным и во многих случаях единственным инструментом в решении большинства практических задач. Созданная первоначально на базе исследований течений несжимаемой жидкости в трубах, каналах, пограничных слоях, струях, следах и использовавшаяся главным образом для предсказания свойств течений несжимаемой жидкости, полуэмпирическая теория турбулентности открывает широкие возможности для изучения значительно более сложных течений, таких, как течения сжимаемого и теплопроводящего газа, течения многокомпонентных реагирующих газовых смесей и т.п. Об этом убедительно свидетельствуют результаты многочисленных экспериментальных и теоретических работ, проведенных в последние годы.

Книга не претендует на исчерпывающее освещение всех проблем, возникающих при исследовании течений газа в турбулентном пограничном слое в сверхзвуковых потоках. Отчасти это обусловлено недостаточной разработанностью этих проблем, особенно это относится к турбулентному пограничному слою на разрушающихся поверхностях, движению ионизированного и излучающего газа и т.п. Отчасти сыграли роль личные интересы автора. В частности, в специальные главы книги (3-5) включены лишь те разделы теории турбулентного пограничного слоя, в разработке которых в той или иной степени автор принимал участие.

Первая глава содержит изложение основ молекулярной теории газовых потоков и вывод динамических уравнений многокомпонентного реагирующего газа из основного уравнения кинетической теории газов — уравнения Больцмана.

Во второй главе дан вывод системы уравнений турбулентного движения многокомпонентного реагирующего газа. Из этой системы уравнений получены уравнения турбулентного пограничного слоя. Там же выводятся играющие важную роль в полуэмпирической теории турбулентного пограничного слоя интегральные соотношения импульсов и энергии.

В третьей главе рассматриваются теоретические и экспериментальные результаты, полученные при исследовании характеристик турбулентного пограничного слоя на непроницаемой поверхности в однородном по составу сверхзвуковом газовом потоке. Излагаются полуэмпирический и эмпирический методы расчета пограничного слоя на плоской пластине. Анализируется влияние сжимаемости и теплообмена на ламинарный подслой. Приводятся экспериментальные и теоретические данные по исследованию параметров, характеризующих теплообмен между газом и стенкой (параметр аналогии Рейнольдса, устанавливающий связь между трением и теплообменом; коэффициент восстановления). Дается обобщение полуэмпирического метода расчета на случаи обтекания конуса под нулевым углом атаки, сферы, а также обтекаемых безотрывно тел произвольной формы.

Четвертая глава посвящена рассмотрению движения диссоциирующего газа в турбулентном пограничном слое. Приводятся подробные сведения по кинетике химических реакций, протекающих в газе и на поверхности тел, и, в частности, данные по кинетике реакций диссоциации кислорода и азота. Описываются различные модели диссоциирующего газа — идеально диссоциирующего и частично возбужденного диссоциирующего газов. Излагаются полуэмпирические методы расчета трения и теплообмена на плоской пластине для равновесного, замороженного и неравновесного состояний газа.

В пятой главе приводятся результаты экспериментального и теоретического исследований турбулентного пограничного слоя при наличии массообмена между газом и обтекаемой поверхностью. Излагаются методы расчета трения и теплообмена на пористой пластине при вдувании различных газов в пограничный слой.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода в свет первого издания настоящей монографии прошло более десяти лет — срок немалый со многих точек зрения. За это время некоторые прикладные проблемы турбулентности в сверхзвуковых потоках потеряли характерную для них остроту в связи с более или менее успешным их решением на практике. Это, пожалуй, относится к проблеме теплозащиты ракетно-космических аппаратов с помощью уносимых покрытий (вдувания газа через пористую стенку). Число публикаций, относящихся к теоретическому и экспериментальному исследованию этой проблемы, в последние годы резко сократилось.

Некоторые проблемы, представлявшие в то время особенно актуальными, например проблема определения теплообмена при очень больших скоростях движения летательных аппаратов, таких, что существенными становятся эффекты ионизации и излучения, хотя и остаются актуальными, если иметь в виду отдаленную перспективу полетов к другим планетам, однако и здесь нельзя не отметить некоторого "естественного" спада интереса к этой проблеме в связи со стабилизацией, а иногда и сокращением космических программ.

Если попытаться определить основную тенденцию в развитии той области механики жидкости и газа, которую принято называть теорией турбулентности, то можно отметить тенденцию к углубленному изучению механизма турбулентности, о чем свидетельствует бурное развитие так называемых усложненных полуэмпирических теорий турбулентности, основанных на использовании уравнений кинетической энергии турбулентности и уравнений переноса турбулентных напряжений (уравнений для вторых моментов). Еще одна тенденция, по-видимому, состоит в наметившемся повороте от космических проблем к земным. Методы теории турбулентности все шире применяются в таких нетрадиционных областях, как химическая технология, металлургия, пищевая технология и т.д.

Отмеченные тенденции автор попытался учесть при подготовке второго издания книги. Сделано это путем существенного расширения, а в ряде случаев и переработки разделов книги, имеющих общетеоретическое значение, тех разделов, которые могут служить основой для решения многочисленных задач и проблем, выдвигаемых различными областями техники.

С учетом отмеченного выше расширения сферы приложений полуэмпирической теории турбулентности было сочтено целесообразным сохранить изложение некоторых простых, интегральных методов расчета турбулентных пограничных слоев, прошедших проверку временем. Эти методы, обладающие большой простотой для реализации на ЭВМ, в то же время обеспечивающие достаточную для многих практических приложений точность, вполне доступны для непрофессионалов в области механики жидкости и газа и вычислительной математики. Это обстоятельство, на наш взгляд, весьма существенно в условиях, когда проблема создания общедоступных пакетов стандартных программ все еще далека от своего полного решения.

В то же время в книге по возможности уделено необходимое внимание численным методам интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя и результатам, полученным на их основе.

В настоящем издании структура книги в основном сохранена.

Наименьшим изменениям подверглась первая глава книги, содержащая изложение основ кинетической теории многокомпонентных газовых смесей. По сравнению с первым изданием здесь дополнительно рассмотрены имеющие большое практическое значение упрощенные методы расчета коэффициентов переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности) в многокомпонентных смесях, приведены необходимые для расчета этих коэффициентов материалы справочного характера. Уточнено, что принципиально важно, описание диффузии в многокомпонентных смесях.

Вторая глава, посвященная описанию турбулентности в газодинамических потоках, подверглась наиболее существенной переработке и изменению. По сравнению с первым изданием здесь рассмотрен помимо классического еще один способ получения уравнений осредненного турбулентного движения, основанный на введении средневзвешенных параметров потока, показана связь первого классического и второго способов осреднения; дан вывод уравнений переноса турбулентных напряжений и уравнения кинетической энергии турбулентности; приведены различные формы уравнений турбулентного пограничного слоя для плоского, осесимметричного, пространственного течений. Специальный параграф (§ 10) посвящен рассмотрению современных представлений о структуре турбулентного пограничного слоя.

Совершенно новым является § 11 главы второй, содержащий обстоятельный обзор современных полуэмпирических гипотез турбулентности, главным образом многочисленных модификаций гипотезы Прандтля (гипотез эффективной вязкости). Специальные разделы этого параграфа посвящены полуэмпирическим гипотезам турбулентности, используемым для замыкания уравнений для вторых моментов, а также рассмотрению некоторых достаточно общих проблем полуэмпирической теории турбулентности, в частности проблемы предотрывных течений.

В третью главу по сравнению с первым изданием включен параграф (§ 13), посвященный численным методам интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя в газовых потоках. В этом

параграфе рассмотрено состояние проблемы определения эффективной теплопроводности, эффективного и турбулентного чисел Прандтля, приведены различные формы уравнений турбулентного пограничного слоя, в том числе в переменных Дородницына – Лиза, Крокко и Мизеса; даны некоторые рекомендации по численным методам интегрирования этих уравнений и ссылки на соответствующую литературу; дано изложение нового интегрального двухпараметрического метода расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при больших продольных перепадах давления.

Во многом вновь написана четвертая глава книги. Это относится частично к изложению метода расчета турбулентного пограничного слоя в диссоциирующем газе в приближении локального подобия. Совершенно новым является практически весь иллюстративный материал четвертой главы, основанный на использовании последних результатов исследований в этой области. Особо отметим в четвертой главе обширный обзорный материал по рассматриваемой проблеме, составляющий содержание § 21. Отметим также появление некоторых элементов завершенности в исследовании ряда аспектов рассматриваемой проблемы, например появление номограмм для расчета максимальных тепловых потоков на сфере в широком диапазоне изменения параметров движения, создание простых корреляционных формул для расчета трения и тепловых потоков на плоской пластине в условиях диссоциации воздуха, что также нашло отражение в четвертой главе.

Наконец, отметим, что во втором издании целиком опущена пятая глава первого издания, посвященная проблемам тепломассообмена при подаче вещества сквозь пористую стенку.

В заключение автор выражает искреннюю признательность своему учителю Льву Герасимовичу Лойцянскому за постоянное внимание и поддержку при написании книги в особенности за полезное, нередко критическое обсуждение многих рассматриваемых в книге вопросов.

Автор глубоко благодарен докт. техн. наук А.С. Гиневскому, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд полезных критических замечаний, канд. физ.-мат. наук С.Б. Колешко за помощь при написании § 18, канд. физ.-мат. наук К.Е. Юрченко за помощь при подготовке рукописи к печати.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Буквы латинского алфавита

- A_k - химические символы реагирующих веществ, уравнение (4.3);
- a - скорость звука;
- c_F - средний коэффициент трения, равенство (3.104);
- c_H - средний коэффициент теплоотдачи;
- c_{ξ} - местный коэффициент трения, формула (2.122);
- c_h - местный коэффициент теплоотдачи, равенство (2.129);
- c_i - массовая концентрация i -й компоненты, выражение (1.34);
- c_m - относительная массовая скорость вещества через поверхность, равенство (2.123);
- c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме, выражение (1.48);
- c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении;
- c_{p_i} - удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном давлении;
- c_{v_i} - удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном объеме, выражение (1.48);
- D - энергия диссоциации на единицу массы молекул;
- $D_{i,j}$ - коэффициент диффузии многокомпонентной смеси;
- $\mathcal{D}_{i,j}$ - коэффициент диффузии бинарной смеси;
- $\mathcal{D}_i$ - эффективный коэффициент диффузии, соотношение (4.151);
- D_i^T - коэффициент термодиффузии;
- $\mathcal{D}_T$ - коэффициент турбулентной диффузии, формула (4.82);
- Da - число Дамкелера, выражение (4.97);
- d - диаметр сферы;
- E - внутренняя энергия газа, формула (1.43);
- E_T - средняя плотность кинетической энергии пульсационного движения;
- E_0 - энергия газа при нулевой абсолютной температуре;
- E_a - энергия активации;
- E_{a_w} - энергия активации поверхностной реакции;

- e_i - энергия внутренних степеней свободы частицы i -го сорта;
 $\bar{z} = \frac{1}{\pi \alpha}$ - эмпирическая постоянная турбулентности;
 f_i - функция распределения;
 q_{iw} - массовая скорость образования i -й компоненты на единичной поверхности;
 g_i - статистический вес;
 H - полная энтальпия смеси, выражение (1.128);
 $H^* = \delta^*/\delta^{**}$ - формпараметр, равенство (2.118);
 h - энтальпия смеси;
 h_i - энтальпия i -й компоненты;
 h_i^0 - теплота образования i -й компоненты при стандартных условиях;
 H_w - энтальпия восстановления;
 $\underline{j}_i$ - вектор плотности потока массы i -й компоненты, выражение (1.15);
 k - постоянная Больцмана;
 k_{Ti} - термодиффузионные отношения, выражение (1.101);
 K_i - числовая скорость образования частиц i -го сорта в единице объема, уравнение (1.32);
 K_n - выражение (4.9),
 K_p - выражение (4.14),
 K_x - выражение (4.17),
 K_e - выражение (4.18) } константы равновесия;
 k_{wi}, k_{wj} - константы скоростей прямой и обратной поверхностных реакций;
 k', k'' - константы скоростей прямой и обратной реакций в газовой фазе;
 K_w - константа равновесия поверхностной реакции;
 k_d - константа скорости диссоциации;
 k_r - константа скорости рекомбинации;
 I_{ij} - интеграл столкновений, выражение (1.21);
 L - 1) характерная длина; 2) масштаб турбулентности;
 Le_{ij} - число Льюиса для бинарной смеси, равенство (1.139);
 Le_i - эффективное число Льюиса;
 Le_T - турбулентное число Льюиса, выражение (4.87);
 l - турбулентный путь перемешивания;
 M_i - молекулярный вес i -й компоненты;
 M - молекулярный вес смеси;
 Me - число Маха на внешней границе пограничного слоя;
 m_i - масса частицы i -го сорта;

- n_i - числовая плотность частиц i -го сорта, выражение (1.1);
 n - число частиц в единице объема, выражение (1.2);
 $[n_i] = n_i / n$ - число молей i -й компоненты в единице объема;
 n_i, n_j - порядок прямой и обратной поверхностных реакций;
 N_A - число Авогадро;
 p - давление смеси, выражение (1.12);
 p_i - парциальное давление i -й компоненты, выражение (1.11);
 p_d - характеристическое давление идеально диссоциирующего газа;
 P - тензор давлений, выражение (1.17);
 P_i - тензор давлений i -й компоненты, выражение (1.16);
 Pr - число Прандтля, равенство (1.137);
 Pr_E - число Прандтля, построенное по полным параметрам;
 Pr_T - турбулентное число Прандтля, выражение (3.13);
 Pr_{eff} - эффективное число Прандтля, выражение (3.13);
 Q_p - сумма состояний газа с единичным давлением;
 Q - общая сумма состояний;
 q_i - вектор плотности потока кинетической энергии i -й компоненты, соотношение (1.18);
 q - вектор плотности потока тепла, соотношение (1.19);
 R - универсальная газовая постоянная;
 Re^* - число Рейнольдса, построенное по толщине вытеснения, равенство (3.88);
 Re^{**} - число Рейнольдса, построенное по толщине потери импульса, равенство (3.54);
 Re_x - число Рейнольдса, построенное по параметрам на внешней границе пограничного слоя, равенство (3.55);
 γ - коэффициент восстановления;
 $\underline{r}$ - радиус-вектор с проекциями x, y, z ;
 r_0 - радиус поперечной кривизны тела вращения;
 Sc_T - турбулентное число Шмидта, выражение (4.84);
 Sc_{ij} - число Шмидта для бинарной смеси, выражение (1.140);
 Sc_i - эффективное число Шмидта;
 $\dot{S}$ - тензор скоростей деформаций;
 T - температура газа, равенство (1.10);
 T_d - диссоциационная характеристическая температура;
 T_γ - 1) температура восстановления; 2) характеристическая вращательная температура;
 T_v - характеристическая колебательная температура;
 t - время;
 $\underline{v}_i$ - скорость частицы i -го сорта (проекции v_{ix}, v_{iy}, v_{iz});
 $\underline{v}$ - среднемассовая скорость, выражение (1.7);
 $\bar{v}_i$ - средняя скорость частиц i -го сорта, выражение (1.6);
 $\underline{V}_i$ - тепловая скорость частиц i -го сорта, выражение (1.8);

$\bar{V}_i$	- скорость диффузии i -й компоненты, выражение (1.9);
v_*	- динамическая скорость;
v	- составляющая скорости по оси y ;
u	- составляющая скорости по оси x ;
U	- проекция скорости во внешнем потоке на ось x ;
w	- составляющая скорости по оси z ;
W	- проекция скорости во внешнем потоке на ось z ;
w_i	- массовая скорость образования i -й компоненты, соотношение (1.35);
W	- активный участок каталитической поверхности;
x_i	- мольная концентрация;
X	- каталитическая частица;

Буквы греческого алфавита

α	- эмпирическая постоянная турбулентности;
$\gamma = c_p / c_v$	
δ	- толщина пограничного слоя;
δ^*	- толщина вытеснения, выражение (2.114);
δ_i^*	- толщина вытеснения в несжимаемой жидкости, равенство (2.174);
δ^{**}	- толщина потери импульса, выражение (2.113);
δ_n^{**}	- толщина потери энергии, выражение (2.127);
δ_{jk}	- символ Кронекера;
$\hat{\epsilon}$	- единичный тензор, выражение (1.60);
ϵ_i	- параметр потенциальной функции межмолекулярного взаимодействия для частиц i -го сорта;
τ	- параметр трения, равенство (3.59);
η	- переменная "закона стенки", равенство (3.61);
κ	- эмпирическая постоянная турбулентности;
λ	- коэффициент молекулярной теплопроводности (смеси);
λ_i	- коэффициент теплопроводности чистого одноатомного газа i -го сорта, равенство (1.102);
λ_T	- коэффициент турбулентной теплопроводности, соотношение (3.6);
μ	- коэффициент динамической вязкости (смеси);
μ_i	- коэффициент динамической вязкости i -й компоненты;
μ_Σ	- полная вязкость;
μ_T	- коэффициент турбулентной вязкости, равенство (3.6);
ν	- коэффициент кинематической вязкости;
ν_T	- кинематический аналог турбулентной вязкости;
ν'_k, ν''_k	- стехиометрические коэффициенты химической реакции, уравнение (4.3);
ρ	- плотность газа (смеси), выражение (1.4);
ρ_i	- парциальная плотность i -й компоненты, равенство (1.3);
ρ_{dL}	- характеристическая плотность идеально диссоциирующего газа;
σ_i	- диаметр столкновений частицы i -го сорта;

- τ - напряжение трения;
- Ψ - переменная "закона стенки", равенство (3.61);
- Ψ - вектор плотности потока, выражение (1.14);
- $\Omega_i^{(1,1)*}$ - интеграл соударений для переноса массы частиц i -го сорта;
- $\Omega_i^{(2,2)*}$ - интеграл соударений для переноса импульса частицами i -го сорта;

Нижние индексы

- e - параметры на внешней границе пограничного слоя;
- w - параметры при отсутствии теплообмена между газом и стенкой;
- s - параметры в критической точке;
- t - параметры в точке перехода ламинарного движения в турбулентное;
- 0 - параметры в несжимаемой жидкости;
- ∞ - параметры (на бесконечности) в набегающем потоке;
- Σ - полные величины, равенства (2.78) - (2.80);
- x - параметры на границе вязкого подслоя;
- T - параметры в турбулентном потоке;

Верхние индексы

- (e) - равновесное течение;
- (f) - замороженное течение;
- (ne) - неравновесное течение;
- черта сверху: 1) в гл. 1 - статистическое осреднение по скоростям; 2) в гл. 2 - осреднение по времени, равенство (2.2); 3) в гл. 3-4 - безразмерные величины
- $\sim$ (волнистая черта сверху) - средневзвешенные величины, соотношения (2.9), (2.10);

один штрих- пульсационная составляющая величины при осреднении по Рейнольдсу, равенство (2.1);

два штриха- пульсации величин при использовании "средневзвешенного" осреднения, равенство (2.11).

Глава 1.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие авиационной, ракетной и космической техники, атомной энергетики, а в последние годы химической технологии обусловило большой интерес к проблемам движения вязкого многокомпонентного химически реагирующего газа. Изучение этих проблем убедительно показало, что с помощью классической механики жидкости и газа, в которой рассматривались течения однородного по составу газа со сравнительно небольшими скоростями, описать такие течения с необходимой для практики степенью точности во многих случаях нельзя.

Применительно к задачам авиационной, ракетной и космической техники необходимость учета таких факторов, как многокомпонентность среды и химические реакции связана с переходом к движению с очень большими сверхзвуковыми скоростями. При таких скоростях температура газа в скачках уплотнения (переход механической энергии в тепло за счет ударного сжатия) и пограничных слоях (переход механической энергии в тепло за счет вязкой диссипации) повышается настолько, что в газе начинают протекать термохимические процессы, приводящие к расщеплению молекул газа на более простые молекулы и атомы (диссоциация), распаду молекул и атомов на ионы и электроны (ионизация), образованию окислов и других химических соединений. В некоторых случаях, например при входе космического объекта в плотные слои атмосферы Земли и других планет, необходимо учитывать процессы, происходящие на поверхности обтекаемых тел, такие, как плавление и испарение поверхностного слоя тела, сублимация, химические реакции между компонентами наружной среды и тела и т.д.

В атомной энергетике интерес к рассматриваемым проблемам обусловлен продолжающимся поиском и попытками применения новых, более эффективных теплоносителей, в частности диссоциирующих.

Во всех этих случаях движущаяся среда должна рассматриваться как смесь нескольких отличающихся по своим физико-химическим свойствам компонент, между которыми при определенных условиях

могут протекать химические реакции, сопровождаемые выделением или поглощением тепла. Изучение столь сложных процессов методами феноменологической газовой динамики во многих случаях оказывается недостаточно эффективным, в особенности если скорости конвектирующих процессов (конвекции, диффузии, химических реакций) оказываются по порядку величины близкими (неравновесные течения).

Феноменологический подход к изучению различных газодинамических явлений основывается на постулировании определенных соотношений между градиентом скорости и напряжением трения (закон Ньютона), тепловым потоком и градиентом температуры (закон Фурье), диффузионным потоком и градиентом концентраций (закон Фика) и на использовании уравнений, которые получаются из фундаментальных законов классической механики и термодинамики. Коэффициенты переноса, т.е. коэффициенты пропорциональности в законах Ньютона, Фурье и Фика, отражающие определенные свойства молекул газа и, следовательно, определяемые его микроструктурой, входят в феноменологическую теорию как известные наперед константы или функции состояния, которые не могут быть вычислены теоретически, а должны определяться из опыта. Вполне естественно, что феноменологическая теория, основывающаяся на приближенной макромоделе газа, оказывается недостаточной для описания многих сложных явлений, в которых необходимо учитывать разнообразные микропроцессы (возбуждение внутренних степеней свободы молекул, диссоциация, ионизация и т.д.). Методом, который позволяет описать такие процессы, является метод кинетической теории газов.

Принципиально важным результатом этой теории следует считать вывод уравнений гидрогазодинамики на основе уравнения Больцмана, что позволило установить непрерывную связь между микро- и макропроцессами, с одной стороны, и указать границы применимости этих уравнений, с другой. Чрезвычайную значимость в прикладном смысле приобретает при исследовании течений многокомпонентных смесей химически реагирующих газов возможность вычисления теоретически на основе решения уравнения Больцмана в первом приближении коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) как функций температуры и давления газовой смеси, молекулярных весов компонент и параметров, описывающих закон межмолекулярного взаимодействия. Важна также возможность построения модели межмолекулярного взаимодействия на основе экспериментальных данных о коэффициентах переноса.

В связи со сказанным в настоящей главе кратко излагаются некоторые элементы кинетической теории газов, вывод уравнений динамики вязкого многокомпонентного химически реагирующего газа на основе уравнения Больцмана, а также рассматриваются полезные практически результаты решения уравнения Больцмана в первом приближении, относящиеся непосредственно к коэффициентам переноса различных субстанций (количества движения, тепла, вещества) в многокомпонентных смесях.

Обстоятельное и глубокое изложение кинетической теории газов содержится в классических монографиях Чепмена и Каулинга [2],

Гирифельдера, Кертисса и Берда [1]. Из руководств, опубликованных сравнительно недавно, укажем на книгу Фершигера и Капера [3].

Кинетическая теория газов справедлива, как известно, лишь для достаточно малых плотностей газа, когда влиянием столкновений более чем двух молекул можно пренебречь. Если средняя длина свободного пробега молекул в газе мала по сравнению с характерными макроскопическими размерами тела, то газ ведет себя как сплошная среда. Уравнения динамики вязкого газа, получаемые в этом случае из уравнения Больцмана, служат основой для описания турбулентных течений. Те же уравнения, а также коэффициенты молекулярного переноса необходимы непосредственно при анализе турбулентных пристенных течений, поскольку в непосредственной близости от стенки (в области вязкого подслоя) молекулярный перенос преобладает над молярным (турбулентным). Этими обстоятельствами и объясняется включение в настоящую книгу, посвященную турбулентным течениям, того материала, который составил содержание первой главы.

§ 2. ЭЛЕМЕНТЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

Газовую среду можно рассматривать как систему дискретных частиц, взаимодействующих между собой. Динамическое состояние такой системы полностью определяется заданием координат и скоростей (импульсов) всех частиц. Законы классической механики в принципе позволяют по известному динамическому состоянию системы в начальный момент времени предсказать ее состояние в любой последующий момент времени. Однако поскольку, в практически важных ситуациях приходится рассматривать очень большое число частиц, состояние каждой из которых в определенный (начальный) момент времени может быть неизвестно, такой подход оказывается мало эффективным. Неэффективность подобного подхода определяется также чрезвычайно большой вычислительной сложностью расчета взаимодействия многих частиц. Кроме того, для практических целей обычно нет надобности в столь детальном знании состояния системы частиц, вполне достаточной оказывается информация о состоянии газовой среды "в среднем". Таким образом, рассматриваемый подход вследствие избытка получаемой информации оказывается и нецелесообразным.

Гораздо более эффективным и целесообразным подходом к решению проблемы оказывается статистический подход, лежащий в основе кинетической теории газов.

Согласно этому подходу каждой частице (молекуле), имеющей в определенный момент времени некоторую скорость, приписывается определенное положение в пространстве скоростей, характеризующее вектором $\underline{v}$. Положение частицы в физическом пространстве определяется вектором $\underline{r}$.

Если молекула многоатомна, то, помимо координат $\underline{v}$ и $\underline{r}$, необходимы координаты, характеризующие ее внутреннее состояние.

Однако в дальнейшем, если это особо не оговорено, будут рассматриваться лишь частицы без внутренних степеней свободы (одноатомные молекулы).

Для полного описания динамического состояния системы частиц в кинетической теории газов вводится понятие о функции распределения. Если рассматривается смесь (одноатомных) газов, то свойства каждой компоненты этой смеси могут быть выражены через функцию распределения $f_i(\underline{r}, \underline{v}_i, t)$, определяемую как количество частиц i -го сорта, которые в момент времени t находятся в элементарном единичном объеме физического пространства вблизи точки $\underline{r}$ и обладают скоростями внутри элементарного единичного объема пространства скоростей вблизи точки $\underline{v}_i$.

Пространство $(\underline{r}, \underline{v}_i)$ является многофазовым пространством, поэтому важно отметить для дальнейшего, что координаты положения $\underline{r}(x, y, z)$ и координаты скоростей $\underline{v}_i(v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ являются независимыми переменными. Здесь x, y, z — проекции вектора $\underline{r}$ на оси пространственной системы координат; v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} — проекции вектора $\underline{v}_i$ на те же оси.

Полное число частиц i -го сорта, находящихся в элементарном единичном объеме физического пространства вблизи точки $\underline{r}$ в момент времени t , получится интегрированием функции распределения по всем возможным значениям скоростей v_{ix}, v_{iy} и v_{iz} :

$$n_i(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i dv_{ix} dv_{iy} dv_{iz}. \quad (1.1)$$

Величина n_i по смыслу является числовой плотностью частиц i -го сорта.

Для удобства будем в дальнейшем обозначать тройной интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dv_{ix} dv_{iy} dv_{iz}$$

знаком

$$\int \dots d\underline{v}_i.$$

Суммируя числовые плотности частиц i -го сорта n_i по всем компонентам, получим полное число частиц всех сортов в единице объема

$$n = \sum_i n_i = \sum_i \int f_i d\underline{v}_i. \quad (1.2)$$

По аналогии с n_i величину n можно назвать числовой плотностью смеси.

Умножая числовую плотность частиц i -го сорта n_i на массу частицы i -го сорта m_i , определим парциальную плотность частиц i -го сорта

$$\rho_i = m_i n_i = m_i \int \dot{z}_i d\mathbf{v}_i. \quad (1.3)$$

Суммируя парциальные плотности по всем компонентам смеси, найдем плотность среды (смеси) в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t

$$\rho = \sum_i \rho_i = \sum_i m_i n_i = \sum_i m_i \int \dot{z}_i d\mathbf{v}_i. \quad (1.4)$$

По известной функции распределения можно вычислить среднее значение какой-либо величины ψ_i , связанной с частицами i -го сорта и являющейся функцией скорости. Формула для вычисления среднего значения ψ_i имеет вид

$$\bar{\psi}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_i} \int \dot{z}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) \psi_i(\mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = \frac{\int \dot{z}_i \psi_i d\mathbf{v}_i}{\int \dot{z}_i d\mathbf{v}_i}. \quad (1.5)$$

Черта над ψ_i является символом осреднения.

Таким образом, среднюю скорость $\bar{\mathbf{v}}_i$ частиц i -й компоненты, имеющей числовую плотность n_i , определим следующим образом:

$$\bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_i} \int \mathbf{v}_i \dot{z}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) d\mathbf{v}_i. \quad (1.6)$$

В практических приложениях наиболее часто пользуются понятием средней массовой или гидродинамической скорости, которая определяется по формуле

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_i m_i n_i \bar{\mathbf{v}}_i. \quad (1.7)$$

Согласно этой формуле каждая частица дает вклад в гидродинамическую скорость, пропорциональный ее массе m_i . Скорость $\mathbf{v}$, называемая также скоростью потока, согласно (1.7), выражается через количество движения (импульс) единицы объема смеси $\sum_i m_i n_i \bar{\mathbf{v}}_i$ и плотность смеси ρ . Именно эти величины могут быть сравнительно легко измерены в опыте, что и предопределило широкое использование понятия гидродинамической скорости.

Тепловая скорость частиц i -го сорта определяется как скорость частиц относительно системы координат, движущейся со средней массовой скоростью

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}. \quad (1.8)$$

Диффузионная скорость i -й компоненты определяется как средняя тепловая скорость, т.е. как скорость потока частиц i -й компоненты относительно системы координат, движущейся со средней массовой скоростью газа

$$\bar{V}_i(\underline{r}, t) = \frac{1}{n_i} \int (\underline{v}_i - \underline{v}) f_i(\underline{r}, \underline{v}_i, t) d\underline{v}_i = \bar{\underline{v}}_i - \underline{v}. \quad (1.9)$$

Температура T в кинетической теории определяется через осредненную по всем частицам кинетическую энергию теплового движения

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{2} m_i n_i \bar{V}_i^2, \quad (1.10)$$

где k — постоянная Больцмана, равная $1,380 \cdot 10^{-16}$ эрг/К.

Парциальное давление i -й компоненты p_i и давление p в смеси газов выражаются соответственно соотношениями

$$p_i = n_i kT = \rho_i \frac{k}{m_i} T, \quad (1.11)$$

$$p = \sum_i p_i = \sum_i n_i kT = n kT. \quad (1.12)$$

Собирая вместе выражения всех макроскопических величин через функцию распределения, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(\underline{r}, t) &= \sum_i m_i n_i = \sum_i m_i \int f_i d\underline{v}_i, \\ T(\underline{r}, t) &= \frac{1}{3nk} \sum_i m_i \int V_i^2 f_i d\underline{v}_i, \\ \underline{v}(\underline{r}, t) &= \frac{1}{\rho} \sum_i m_i \int \underline{v}_i f_i d\underline{v}_i, \\ p_i &= \rho_i \frac{k}{m_i} T, \quad \rho_i = m_i n_i, \quad p = \sum_i p_i. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Если поле одной или нескольких величин, характеризующих макроскопические свойства газа, является неоднородным, то состояние такой системы принято называть неравновесным. Неоднородность полей, т.е. существование градиентов макроскопических величин (средней массовой скорости $\underline{v}$, температуры T , массовой концентрации $c_i = \rho_i / \rho$ и др.) является причиной молекулярного переноса в газе количества движения $m_i \underline{V}_i$, кинетической энергии $m_i V_i^2 / 2$ и массы m_i . Для характеристики молекулярного переноса той или иной субстанции в кинетической теории вводится понятие вектора плотности потока величины ψ_i

$$\underline{\Psi}_i = \int \psi_i f_i \underline{V}_i d\underline{V}_i. \quad (1.14)$$

Отметим, что при вычислении средних величин интегрирование по

$\underline{V}_i$ эквивалентно интегрированию по ψ_i , так как эти скорости отличаются на постоянную величину и интегрирование ведется по всем значениям скоростей (от $-\infty$ до $+\infty$).

Физический смысл вектора плотности потока состоит в том, что составляющая его в любом направлении представляет собой плотность потока соответствующей физической величины через поверхность, нормальную к этому направлению.

Если $\phi_i = m_i$, то из равенства (1.14) получим вектор плотности потока массы

$$\underline{j}_i = m_i \int \underline{f}_i \underline{V}_i dV_i = m_i n_i \overline{\underline{V}_i}. \quad (1.15)$$

Если $\phi_i = m_i \underline{V}_i$, то

$$P_i = m_i \int \underline{f}_i \underline{V}_i \underline{V}_i dV_i = m_i n_i \overline{\underline{V}_i \underline{V}_i} \quad (1.16)$$

представляет собой симметричный тензор 2-го ранга, характеризующий парциальное давление i -й компоненты газа¹.

Сумма тензоров парциальных давлений по всем компонентам газа образует тензор давлений смеси

$$P = \sum_i P_i = \sum_i m_i n_i \overline{\underline{V}_i \underline{V}_i}. \quad (1.17)$$

Диагональные компоненты тензора давлений P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} равны нормальным напряжениям, а недиагональные представляют собой касательные напряжения. Например, величина P_{yx} равна силе, действующей на единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению y , в направлении x .

Если $\phi_i = m_i V_i^2 / 2$, то

$$\underline{q}_i = \frac{1}{2} m_i \int \underline{f}_i V_i^2 \underline{V}_i dV_i = \frac{1}{2} m_i n_i \overline{V_i^2 \underline{V}_i} \quad (1.18)$$

есть вектор потока, характеризующий перенос кинетической энергии частицами i -го сорта. Сумма таких векторов по всем компонентам смеси газа выражает собой вектор плотности потока тепла

$$\underline{q} = \sum_i \underline{q}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i n_i \overline{V_i^2 \underline{V}_i}. \quad (1.19)$$

Составляющие q_x , q_y , q_z вектора плотности потока тепла представляют собой плотности потоков кинетической энергии в направлениях x , y и z соответственно.

¹ В равенстве (1.16) тензор P_i рассматривается как результат диадного перемножения двух векторов ($\underline{V}_i \underline{V}_i$), причем, в отличие от скалярного ($\underline{V}_i \cdot \underline{V}_i$) и векторного ($\underline{V}_i \times \underline{V}_i$) произведений этих векторов, в диадном произведении знак умножения не ставится.

Из рассмотрения равенств (1.13) и (1.15)–(1.19) следует, что если функция распределения f_i известна, то проблема определения поля течения и характеристик переноса также может быть решена полностью.

Закономерности изменения функции распределения f_i описываются интегро-дифференциальным уравнением Больцмана, которое в случае отсутствия внешнего силового поля имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \psi_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \psi_i} = \sum_j I_{ij} \quad (1.20)$$

Здесь

$$I_{ij} = 2\pi \iint (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\psi_j \quad (1.21)$$

– интеграл столкновений, учитывающий изменение числа частиц рассматриваемой группы за счет столкновений; $g_{ij} = |\psi_i - \psi_j|$ – абсолютное значение относительной скорости частиц i -го и j -го сортов до соударения; b – минимальное расстояние, на которое приблизились бы друг к другу сталкивающиеся частицы при отсутствии взаимодействия (прицельное расстояние); f'_i и f'_j – функции распределения сталкивающихся частиц i -го и j -го сортов после соударения; f_i и f_j – функции распределения сталкивающихся частиц до соударения.

Уравнения, аналогичные уравнению (1.20), могут быть написаны для всех компонент газовой смеси. В каждом из этих уравнений в правые части под знак интеграла входят функции распределения всех компонент. Эти интегралы неявно зависят от законов межмолекулярного взаимодействия. Функции f'_i и f'_j являются функциями величин ψ'_i и ψ'_j , которые могут быть найдены на основе законов механики при известных ψ_i , ψ_j , b и потенциале межмолекулярного взаимодействия.

§ 3. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ВЕКТОРЫ ПЛОТНОСТИ ПОТОКОВ

Основные газодинамические уравнения переноса – уравнения переноса массы, количества движения и энергии – могут быть получены непосредственно из уравнения Больцмана без определения вида функций распределения. Умножая уравнение Больцмана (1.20) на величину ψ_i и интегрируя результат по всем значениям скорости ψ_i , получим

$$\int \psi_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \psi_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \psi_i} - \sum_j I_{ij} \right) d\psi_i = 0. \quad (1.22)$$

Первые два члена в левой части этого уравнения могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} \int \psi_i \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial t} d\underline{v}_i &= \frac{\partial}{\partial t} \int \psi_i \bar{z}_i d\underline{v}_i - \int \bar{z}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} d\underline{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\psi}_i) - n_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial t}, \\ \int \psi_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial \underline{v}_i} d\underline{v}_i &= \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} \int \bar{z}_i \psi_i \underline{v}_i d\underline{v}_i - \int \bar{z}_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial \underline{v}_i} d\underline{v}_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} \cdot (n_i \overline{\psi_i \underline{v}_i}) - n_i \left(\underline{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \underline{v}_i} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в левую часть уравнения (1.22), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\psi}_i) + \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} \cdot (n_i \overline{\psi_i \underline{v}_i}) - n_i \left(\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial t} + \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \underline{v}_i} \right) = \sum_j \psi_i I_{ij} d\underline{v}_i. \quad (1.23)$$

Это уравнение известно как обобщенное уравнение переноса Энского для величины $\bar{\psi}_i$, связанной с частицами i -го сорта. Производя

суммирование уравнений (1.23) по всем компонентам, можно получить уравнение переноса для смеси

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i n_i \bar{\psi}_i + \frac{\partial}{\partial \underline{v}_i} \cdot \sum_i n_i \overline{\psi_i \underline{v}_i} - \sum_i n_i \left(\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial t} + \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \underline{v}_i} \right) = \sum_{i,j} \int \psi_i I_{ij} d\underline{v}_i. \quad (1.24)$$

Использование уравнения (1.24) для произвольных величин $\bar{\psi}_i$ оказывается весьма затруднительным вследствие наличия в правой части этих уравнений весьма сложных интегралов. Однако если $\bar{\psi}_i$ есть масса m_i , количество движения $m_i \underline{V}_i$ или энергия молекул $m_i V_i^2/2$ (в случае многоатомных молекул в энергию, кроме кинетической энергии, нужно включить и внутреннюю энергию), то, как можно убедиться, правая часть уравнения (1.24) оказывается равной нулю и уравнение существенно упрощается.

Действительно, предположим, что сталкивающаяся система состоит из двух частиц: одна частица сорта i с массой m_i , а другая сорта j с массой m_j . Пусть скорости частиц перед столкновением будут соответственно $\underline{V}_i$ и $\underline{V}_j$, а соответствующие скорости после столкновения обозначим через $\underline{V}'_i$ и $\underline{V}'_j$. Тогда, если система сталкивающихся частиц в целом не подвергается воздействию внешних сил, а столкновения являются адиабатическими, то на основании законов сохранения массы, количества движения и энергии можно записать

$$\begin{aligned} m_i + m_j &= m'_i + m'_j, \\ m_i \underline{V}_i + m_j \underline{V}_j &= m'_i \underline{V}'_i + m'_j \underline{V}'_j, \\ \frac{1}{2} m_i V_i^2 + \frac{1}{2} m_j V_j^2 &= \frac{1}{2} m'_i V'^2_i + \frac{1}{2} m'_j V'^2_j. \end{aligned} \quad (1.25)$$

В случае отсутствия химического взаимодействия

$$m_i = m'_i, \quad m_j = m'_j.$$

Приведенные выражения законов сохранения (1.25) для системы сталкивающихся частиц можно представить в следующей обобщенной форме:

$$\psi_i + \psi_j = \psi'_i + \psi'_j, \quad (1.26)$$

где ψ_i — любая из величин m_i , $m_i V_i$ и $m_i V_i^2/2$. Можно показать, что любая функция скоростей, удовлетворяющая соотношению (1.26) является линейной комбинацией этих величин. Величины ψ'_i , удовлетворяющие равенству (1.26), принято называть сумматорными инвариантами.

Теперь обратимся к рассмотрению интеграла, стоящего под знаком суммы в правой части уравнения (1.24). Этот интеграл

$$\int \psi_i I_{ij} d\underline{v}_i = \iiint \psi_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b d\underline{b} d\underline{v}_j d\underline{v}_i \quad (1.27)$$

равен интегралу

$$\iiint \psi'_i (f_i f_j - f'_i f'_j) g'_{ij} b' d\underline{b}' d\underline{v}'_j d\underline{v}'_i, \quad (1.28)$$

написанному для обратных столкновений.

Можно показать [1], что $g_{ij} = g'_{ij}$, $b = b'$ и $d\underline{v}_j d\underline{v}_i = d\underline{v}'_j d\underline{v}'_i$; поэтому интеграл (1.28) можно переписать в виде

$$- \iiint \psi'_i (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b d\underline{b} d\underline{v}_j d\underline{v}_i. \quad (1.29)$$

Так как интегралы (1.27) и (1.29) равны, то каждый из них равен полусумме обоих интегралов, т.е.

$$\int \psi_i I_{ij} d\underline{v}_i = \frac{1}{2} \iiint (\psi_i - \psi'_i) (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b d\underline{b} d\underline{v}_j d\underline{v}_i.$$

Суммируя эти интегралы по i и j и пользуясь тем, что индексы i и j взаимозаменяемы, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int \psi_i I_{ij} d\underline{v}_i &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} (\psi_i + \psi_j - \psi'_i - \psi'_j) \\ &\times (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b d\underline{b} d\underline{v}_j d\underline{v}_i \end{aligned} \quad (1.30)$$

Для сумматорных инвариантов сумма $\psi_i + \psi_j - \psi'_i - \psi'_j$ равна нулю, следовательно, и правая часть обобщенного уравнения переноса Энского (1.24) обращается в нуль, если ψ_i равно m_i , $m_i \underline{V}_i$ или $m_i \underline{V}_i^2/2$.

Таким образом, перенос массы, количества движения или энергии в смеси газов описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i n_i \bar{\psi}_i + \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \sum_i n_i \bar{\psi}_i \underline{v}_i - \sum_i n_i \left(\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial t} + \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \underline{v}} \right) = 0. \quad (1.31)$$

Теперь перейдем к выводу уравнений переноса для конкретных молекулярных величин. Положим $\psi_i = m_i$. В этом случае уравнение

(1.23) примет вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot (n_i \bar{\underline{v}}_i) = \sum_j \int I_{ij} d\underline{v}_j = K_i. \quad (1.32)$$

Интеграл $\int I_{ij} d\underline{v}_j$ равен скорости увеличения числа частиц i -го сорта за счет столкновений с частицами j -го сорта в единице объема (при отсутствии химических реакций этот интеграл равен нулю). Величина $\sum_j \int I_{ij} d\underline{v}_j = K_i$ выражает общее увеличение числа частиц i -го сорта в единице объема за единицу времени за счет столкновений со всеми типами частиц, включая i -й сорт (за счет химических реакций). Заменяя в уравнении (1.32) $\bar{\underline{v}}_i$ в соответствии с равенством (1.8), получим уравнение неразрывности для i -й компоненты газа

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot [n_i (\underline{v} + \bar{\underline{V}}_i)] = K_i. \quad (1.33)$$

Переходя в уравнении (1.33) от n_i к массовым концентрациям

$$c_i = \frac{m_i n_i}{\sum_i m_i n_i} = \frac{m_i n_i}{m n} = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad m = \left(\sum_i \frac{c_i}{m_i} \right)^{-1}, \quad (1.34)$$

будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_i) + \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot [\rho c_i (\underline{v} + \bar{\underline{V}}_i)] = w_i, \quad (1.35)$$

где $w_i = m_i K_i$ — массовая скорость образования i -й компоненты в единице объема.

Суммируя уравнения (1.35) по всем i , получим уравнение неразрывности для смеси в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho \underline{v}) = 0, \quad (1.36)$$

так как $\sum_i \rho_i \bar{V}_i = 0$ по определению скорости диффузии, а $\sum_i w_i = 0$ в соответствии с равенствами (1.25) и (1.26). Условие

$$\sum_i w_i = 0 \quad (1.37)$$

выражает закон сохранения массы смеси при наличии химических превращений.

Используя уравнение неразрывности для смеси (1.36), преобразуем уравнение неразрывности для i -й компоненты к виду

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x} = w_i - \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho c_i \bar{V}_i). \quad (1.38)$$

Уместно заметить, что в правой части уравнения (1.38) под знаком производной стоит величина, определенная ранее (см. формулу (1.15)) как вектор плотности потока массы i -й компоненты.

Для получения уравнения переноса количества движения подставим в уравнение (1.31) $\psi_i = n_i \bar{V}_i$; в результате получим

$$\sum_i n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{V}_i) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (n_i \underline{v} \bar{V}_i) - n_i \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} - n_i \left(\underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{V}_i \right] = 0. \quad (1.39)$$

Это уравнение можно упростить, используя соотношения между скоростями (1.8) и (1.9) и определение тензора давлений (1.17).

Следует лишь при дифференцировании иметь в виду, что x, y и t — независимые переменные. После некоторых преобразований приведем уравнение движения для смеси газов к следующему виду:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \left(\underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot P \right). \quad (1.40)$$

Уравнение переноса энергии получим, подставив в уравнение (1.31) $\psi_i = n_i V_i^2 / 2$

$$\sum_i \frac{1}{2} n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (n_i V_i^2) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (n_i \underline{v} V_i^2) - n_i \frac{\partial V_i^2}{\partial t} - n_i \left(\underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) V_i^2 \right] = 0. \quad (1.41)$$

Используя, как и ранее, соотношения между скоростями (1.8), (1.9) и определение тензора давлений (1.17), а также вводя вектор плотности потока энергии $\underline{q}$, определяемый выражением (1.19), получим уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \rho \underline{v} E + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \underline{q} + \left(P \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \underline{v} = 0. \quad (1.42)$$

Здесь

$$E = \frac{1}{\rho} \sum_i m_i n_i \overline{V_i^2} \quad (1.43)$$

— внутренняя энергия газа на единицу массы, равная энергии поступательного движения молекул (кинетическая энергия поступательного движения потока газа в целом в эту энергию не входит). В последнем члене уравнения (1.42), соответствующем последнему члену уравнения (1.41), символ $(P \cdot \partial/\partial \underline{v})$ выражает операцию умножения тензора P на вектор $\partial/\partial \underline{v}$. Напомним, что эта операция, в общем случае представляемая выражением $(T \cdot \underline{A})$, определяется как вектор с проекциями

$$(T \cdot \underline{A})_x = T_{xx} A_x + T_{xy} A_y + T_{xz} A_z \text{ и т.д.}$$

Уравнение (1.42) можно упростить, используя уравнение неразрывности для смеси (1.36). В результате будем иметь

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial E}{\partial \underline{v}} = - \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{q} - \left(P \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right) \cdot \underline{v}. \quad (1.44)$$

Уравнение (1.44) справедливо и для газов, состоящих из молекул, обладающих внутренними степенями свободы (многоатомных). В этом случае под величиной E следует понимать сумму энергий поступательных и внутренних степеней свободы молекул

$$E = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{1}{2} m_i n_i \overline{V_i^2} + \frac{1}{\rho} \sum_i n_i e_i, \quad (1.45)$$

а выражение для вектора плотности потока энергии (1.19) должно быть заменено выражением

$$\underline{q} = \frac{1}{2} \sum_i m_i n_i \overline{V_i^2 \underline{V}_i} + \sum_i n_i e_i \underline{\overline{V}_i}, \quad (1.46)$$

где e_i — энергия внутренних $\star$ степеней свободы частицы i -го сорта.

Уравнение баланса энергии (1.44) можно записать через температуру. В этом случае, используя уравнение неразрывности для i -й компоненты (1.35), будем иметь

$$\begin{aligned} \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial \underline{v}} \right) = & - \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \underline{q} - \left(P \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right) \cdot \underline{v} - \\ & - \sum_i w_i E_i + \sum_i E_i \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}} \cdot \rho e_i \underline{\overline{V}_i} \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Здесь

$$c_v = \sum_i c_i \left(\frac{\partial E_i}{\partial T} \right) = \sum_i c_i c_{vi} \quad (1.48)$$

есть средняя теплоемкость смеси на единицу веса при постоянном объеме.

§ 4. СКОРОСТЬ ДИФФУЗИИ, ВЕКТОРЫ ПЛОТНОСТЕЙ ПОТОКОВ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Основные газодинамические уравнения неразрывности (1.38), движения (1.40) и энергии (1.44) или (1.47) были получены из уравнения Больцмана без определения вида функции распределения. Однако, как ясно из рассмотрения этих уравнений, для их практического использования необходимо знать выражения скорости диффузии и векторов плотностей потоков массы, импульса и энергии через пространственные производные от макроскопических величин и коэффициенты переноса.

Для определения указанных величин необходимо решить уравнение Больцмана. Вопросу получения приближенного решения уравнения Больцмана посвящена обширная литература [1-5]. В рамках настоящей книги нет возможности подробно остановиться на этом вопросе, поэтому ограничимся лишь кратким изложением идеи широко известного метода решения уравнения Больцмана — метода возмущений Энского — Чепмена.

Как известно, газ, адиабатически изолированный и не подвергающийся в течение достаточно продолжительного времени внешним возмущающим воздействиям, достигает в конце концов некоторого равновесного (стационарного) состояния. Для систем, находящихся в равновесном состоянии, функция распределения f_i не зависит от времени, вследствие чего правая часть уравнения Больцмана (1.20) равна нулю. Равенство нулю правой части этого уравнения выражает собой состояние равновесия в процессах столкновений, которое заключается в том, что число частиц i -го сорта, выбывающих за счет столкновений из определенного интервала скоростей, точно компенсируется числом частиц, прибывающих в этот интервал за счет столкновений. Условие, достаточное для того, чтобы осуществлялось равновесие, можно получить, если положить подинтегральную функцию в правой части уравнения Больцмана, равной нулю, т.е.

$$f_i' f_j' = f_i f_j. \quad (1.49)$$

Однако неясно, является ли это условие необходимым, так как для равенства нулю правой части уравнения Больцмана необходимо только, чтобы подинтегральная функция принимала положительные и отрицательные значения в области интегрирования, так чтобы определенный интеграл был равен нулю. Необходимость условия (1.49) доказывается H-теоремой Больцмана, доказательство которой можно найти в уже цитированной монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1].

Равенство (1.49) можно записать в виде

$$\ln f_i' + \ln f_j' = \ln f_i + \ln f_j. \quad (1.50)$$

Следовательно, логарифмы функций распределения являются сумма-

торными инвариантами молекулярных столкновений. Но, согласно равенствам (1.25), единственными величинами, которые могут быть сумматорными инвариантами при столкновениях, являются масса m_i , количество движения $m_i \underline{v}_i$ и кинетическая энергия $m_i v_i^2/2$. Поэтому в общем случае $\ln f_i$ должен быть линейной комбинацией этих величин, т.е.

$$\ln f_i = a_i m_i + b_i \cdot (m_i \underline{v}_i) + c \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right), \quad (1.51)$$

где a_i , b_i и c — постоянные, зависящие (через начальные функции распределения) от полного числа молекул i -го сорта, полного импульса и полной энергии системы. Определяя эти постоянные из условий

$$\begin{aligned} \int f_i d\underline{v}_i &= n_i, \\ \sum_i m_i \int \underline{v}_i f_i d\underline{v}_i &= p \underline{v}, \\ \frac{1}{2} \sum_i m_i \int (\underline{v}_i - \underline{v})^2 f_i d\underline{v}_i &= \frac{3}{2} n k T, \end{aligned} \quad (1.52)$$

придем к известному закону Максвелла для функции распределения системы, находящейся в равновесии

$$f_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_i}{2kT} (\underline{v}_i - \underline{v})^2 \right], \quad (1.53)$$

где $\underline{v}_i - \underline{v} = \underline{V}_i$ — тепловая скорость.

В случае, если газовая смесь находится в неравновесном состоянии, функция распределения может быть найдена по методу Энскога — Чепмена путем введения в уравнение Больцмана параметра возмущения ε такого, что ε^{-1} есть мера частоты столкновений. При малом ε столкновения происходят очень часто, вследствие чего газ можно рассматривать как сплошную среду, в каждой точке которой достигается локальное равновесие. Функцию распределения при этом можно разложить в ряд по параметру ε

$$f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \dots \quad (1.54)$$

Подставляя этот ряд в преобразованное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \underline{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \underline{r}_i} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_j I_{ij} \quad (1.55)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему уравнений для функций $f_i^{(0)}$, $f_i^{(1)}$ и т.д.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j I_{ij} (f_i^{(0)}, f_j^{(0)}), \\ \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t} + \underline{v}_i \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \underline{r}_i} &= \sum_j [I_{ij} (f_i^{(0)}, f_j^{(1)}) + I_{ij} (f_i^{(1)}, f_j^{(0)})] \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Решением первого уравнения системы (1.56) является, как не трудно видеть, максвелловское распределение (1.53). Величины $n_i = n_i(\underline{r}, t)$, $\psi = \psi(\underline{r}, t)$ и $T = T(\underline{r}, t)$, через которые определено это распределение, являются произвольными функциями координат и времени. Чтобы эти величины соответствовали своим локальным значениям, необходимо, чтобы решения остальных уравнений системы (1.56) удовлетворяли условиям (1.52). Иными словами, для функций распределения в приближении выше нулевого $f_i^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} \int f_i^{(k)} d\underline{v}_i &= 0, \\ \sum_i m_i \int \underline{v}_i f_i^{(k)} d\underline{v}_i &= 0, \\ \frac{1}{2} \sum_i m_i \int (\underline{v}_i - \underline{v})^2 f_i^{(k)} d\underline{v}_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Используя условия (1.57), можно получить решения второго уравнения системы (1.56) и т.д. Метод Энского - Чепмена, являющийся по существу методом последовательных приближений, может быть в принципе распространен на системы с большими градиентами термодинамических и газодинамических величин. Однако для решения большинства газодинамических задач оказывается практически достаточным решение уравнения Больцмана в первом приближении. В этом случае закон изменения функции распределения мало отличается от максвелловского закона (1.53), а градиенты величин, характеризующих макроскопические свойства газа, оказываются малыми, в том смысле, что эти величины не изменяются заметно на расстоянии порядка средней длины свободного пробега молекул.

Отсылая читателя, интересующегося подробностями математического решения системы (1.56), к уже цитированной монографии Гиршфельдера и др., приведем некоторые результаты, полученные при решении уравнения Больцмана в первом приближении.

4.1. Вязкость газов и газовых смесей. Выражение для тензора давлений имеет вид [1]

$$P = p\hat{e} - 2\mu\hat{S}, \quad (1.58)$$

где

$$p = nkT \quad (1.59)$$

— равновесное статическое давление при местной температуре и плотности частиц,

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

— единичный тензор, μ — коэффициент динамической вязкости, $\dot{S}$ — тензор скоростей деформаций (сдвига), определяемый выражениями

$$S_{jk} = -\frac{1}{3} \delta_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial s_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k}{\partial s_j} \right), \quad (1.61)$$

δ_{jk} — символ Кронекера: $\delta_{jk} = 1$ при $j = k$, $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$.

Диагональные и недиагональные элементы тензора давлений равны

$$P_{jj} = p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_i}{\partial s_i} - 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial s_j}, \quad (1.62)$$

$$P_{jk} = -\mu \left(\frac{\partial v_k}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_k} \right).$$

Из равенств (1.62) видно, что тензор давлений отличается от обычно рассматриваемого в механике сплошных сред [6] тензора напряжений только знаком.

Введенный выше коэффициент динамической вязкости в случае N -компонентной газовой смеси определяется выражением [1]

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & \dots & H_{N1} & x_1 \\ H_{12} & H_{22} & \dots & H_{N2} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{1N} & H_{2N} & \dots & H_{NN} & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & \dots & H_{N1} \\ H_{12} & H_{22} & \dots & H_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{1N} & H_{2N} & \dots & H_{NN} \end{vmatrix}}, \quad (1.63)$$

где

$$H_{ii} = \frac{x_i^2}{\mu_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{2x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{M_i M_k}{(M_i + M_k)^2} \left(\frac{5}{3A_{ik}^*} + \frac{M_k}{M_i} \right), \quad (1.64)$$

$$H_{ij} = -\frac{2x_i x_j}{\mu_{ij}} \frac{M_i M_j}{(M_i + M_j)^2} \left(\frac{5}{3A_{ij}^*} - 1 \right), \quad i \neq j,$$

M_i — молекулярный вес i -й компоненты, $x_i = n_i/n$ — мольная концентрация i -й компоненты; μ_i — коэффициент вязкости i -й,

компоненты, равный

$$\mu_i = 266,93 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{M_i T}}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2.2)*}(T_i^*)} \frac{\Gamma}{\text{см} \cdot \text{с}}, \quad (1.65)$$

σ_i — диаметр столкновения, $T_i^* = kT/\epsilon_i$ — характеристическая температура, ϵ_i/k — параметр потенциальной функции межмолекулярного взаимодействия, $\Omega_i^{(2.2)*}$ — интеграл соударений для переноса импульса, выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые шары, для которой $\Omega_i^{(2.2)*} = 1$.

Значения функции $\Omega_i^{(2.2)*}(T_i^*)$ в широком диапазоне изменения T_i^* приведены в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1] μ_{ij} — коэффициент, определяемый выражением

$$\mu_{ij} = 266,93 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{2M_i M_j T / (M_i + M_j)}}{\sigma_{ij}^2 \Omega_{ij}^{(2.2)*}(T_{ij}^*)} \frac{\Gamma}{\text{см} \cdot \text{с}}, \quad (1.66)$$

где $\Omega_{ij}^{(2.2)*}(T_{ij}^*)$ — интеграл соударения i -й и j -й компонент для переноса импульса.

Входящая в равенства (1.64) величина A_{ij}^* равна $A_{ij}^* = \Omega_{ij}^{(2.2)*} / \Omega_{ij}^{(1.1)*}$ где $\Omega_{ij}^{(1.1)*}(T_{ij}^*)$ — интеграл соударений для переноса масс, выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые шары, для которой

$\Omega_{ij}^{(1.1)*} = 1$, $T_{ij}^* = kT/\epsilon_{ij}$ — характеристическая температура,

ϵ_{ij}/k — параметр потенциальной энергии молекул, характеризующий взаимодействие молекул i -го и j -го сортов, σ_{ij} — эффективный диаметр столкновений молекул. Значения интегралов соударений $\Omega_{ij}^{(2.2)*}$ и $\Omega_{ij}^{(1.1)*}$ приведены в монографии Гиршфельдера и др. [1].

В равенстве (1.64) недиагональные элементы H_{ij} обычно малы по сравнению с диагональными элементами H_{ii} . Чтобы недиагональные элементы точно были равны нулю, необходимо положить $A_{ij}^* = 5/3$. Если это же самое предположение использовать для

Таблица 1

	O ₂	N ₂	O	N	NO	N ₂ O
$\sigma_i, \text{\AA}$	3,467	3,798	3,050	3,298	3,492	3,828
$\epsilon_i/k, \text{K}$	106,7	71,4	106,7	71,4	116,7	232,4

	H ₂	H ₂ O	CO	CO ₂	C	H
$\sigma_i, \text{\AA}$	2,827	2,641	3,690	3,941	3,385	2,708
$\epsilon_i/k, \text{K}$	59,7	809,1	91,7	195,2	30,6	37,0

диагональных элементов, то (1.64) приобретает вид

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{H_{ii}} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\frac{x_i^2}{\mu_i} + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{M_k}{M_i + M_k}}. \quad (1.67)$$

Однако формула (1.67) не очень хорошо подтверждается опытом. Для приведения этой формулы в соответствие с опытными данными оказывается достаточным заменить множитель 2 в знаменателе эмпирическим коэффициентом 1,385, т.е. записать ее в виде

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\frac{x_i^2}{\mu_i} + 1,385 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{M_k}{M_i + M_k}}. \quad (1.68)$$

Для практического использования приведенных соотношений необходимо знание силовых постоянных σ_i и ϵ_i . Для некоторых веществ значения этих постоянных для потенциала Леннарда - Джонса приведены в книге Гиршфельдера и др. [1]. Подробная информация о тех же постоянных для молекул более чем двухсот веществ содержится в работе Свелы [7]. В табл. 1 приводятся значения силовых постоянных из работы [7] для компонент диссоциированного воздуха, а также некоторых других веществ.

Параметры σ_{ij} и ϵ_{ij} могут быть приближенно вычислены по простым комбинаторным правилам

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_j), \quad \epsilon_{ij} = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_j}. \quad (1.69)$$

Интегралы соударений $\Omega^{(1.1)*}$ и $\Omega^{(2.2)*}$, вычисленные и затабулированные в [1] на основе потенциала Леннарда - Джонса, могут быть с достаточной для многих практических приложений точ-

ностью определены по следующим приближенным формулам, полученным Н.А. Анфимовым [8]

$$\Omega^{(1.1)*} = 1,074 T^{*-0,1604}, \quad \Omega^{(2.2)*} = 1,157 T^{*-0,1472}. \quad (1.70)$$

Широкое применение при расчетах коэффициентов вязкости многокомпонентных смесей нашла формула, предложенная Уилки [9]

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N G_{ik} \frac{x_k}{x_i} \right)^{-1}, \quad (1.71)$$

где μ_i - коэффициент вязкости i -й компоненты (1.65), x_k - мольная концентрация k -й компоненты, G_{ik} - функция, выражаемая равенством

$$G_{ik} = \frac{[1 + (\mu_i/\mu_k)^{1/2} (M_k/M_i)^{1/4}]^2}{2^{3/2} [1 + (M_i/M_k)]^{1/2}}. \quad (1.72)$$

Для бинарной смеси соотношение (1.71) принимает вид .

$$\mu_{12} = \frac{\mu_1}{1 + G_{12}(x_2/x_1)} + \frac{\mu_2}{1 + G_{21}(x_1/x_2)}. \quad (1.73)$$

Для пересчета массовой концентрации $c_i = \rho_i/\rho$ в мольную x_i можно воспользоваться выражением

$$x_i = \frac{c_i}{M_i} \left(\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i} \right)^{-1}. \quad (1.74)$$

Обширные данные по вязкости чистых газов и их смесей собраны в монографиях И.Ф. Голубева [10] и Бретшнайдера [11].

4.2. Диффузия в многокомпонентных и бинарных смесях. В результате решения уравнения Больцмана в первом приближении выражение для диффузионного потока i -й компоненты смеси из N компонент, имеет вид [3]¹

$$\underline{j}_i = \rho_i \underline{V}_i = -\rho_i \left(\sum_j D_{ij} d_j + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}} \right), \quad (1.75)$$

$$d_j = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left(\frac{n_j}{n} \right) + \left(\frac{n_j}{n} - \frac{\rho_j}{\rho} \right) \frac{\partial \ln p}{\partial \underline{r}}, \quad (1.76)$$

где D_{ij} и D_i^T - коэффициенты диффузии и термодиффузии многоком-

¹ В литературе встречаются различные определения диффузионных потоков и коэффициентов многокомпонентной диффузии и термодиффузии. В широко известной и неоднократно цитированной выше книге Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1] выражение для диффузионного

понтентной смеси соответственно. Из соотношений (1.75) – (1.76) видно, что при отсутствии массовых сил диффузия может возникать по трем причинам: 1) под действием градиента концентрации (массовая диффузия) 2) под действием градиента давления (бародиффузия) и 3) под действием градиента температур (термодиффузия).

Коэффициенты диффузии в многокомпонентной смеси определяются соотношениями [12]

$$\sum_i \rho_i D_{ik} = 0, \quad (1.77)$$

$$\sum_j \frac{n_i n_j}{n^2 D_{ij}} (D_{ik} - D_{jk}) = \delta_{ik} - \rho_i / \rho. \quad (1.78)$$

Здесь D_{ij} – коэффициенты диффузии в бинарной смеси, введенные в [1]; δ_{ik} – символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$). Важно подчеркнуть, что определенные таким образом коэф-

потока i -й компоненты записывалось в форме

$$j_i = (n^2 m_i / \rho) \sum_j m_j D_{ij} n_j - D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial x_i}.$$

Входящие в это соотношение коэффициенты диффузии многокомпонентной смеси D_{ij} выражаются в виде определителей N -го порядка через $N(N-1)/2$ (N – число компонент смеси) коэффициентов диффузии бинарной смеси D_{ij} , а также концентрации и молекулярные веса компонент. Как отмечается в монографии Фершгера и Капера [3], а также в работе Кертисса [12] коэффициенты D_{ij} , определенные в [1], являются несимметричными, т.е. $D_{ij} \neq D_{ji}$, что явилось следствием допущения о равенстве нулю коэффициентов $D_{ii} = 0$. Асимметрия коэффициентов D_{ij} не согласуется с соотношением взаимности Онзагера. Это согласование, как указывается в работе [3], имеет важное значение для химически реагирующих газовых смесей и многоатомных газов, в которых осуществляются переходы между различными внутренними степенями свободы. Указанное замечание не относится к полученным в [1] и широко используемым в практических расчетах так называемым соотношениям Стефана – Максвелла.

В настоящей работе используются так называемые симметричные коэффициенты многокомпонентной диффузии, введенные Кертиссом [12] (для них сохранены обозначения, принятые в [1] для несимметричных коэффициентов диффузии). Отметим также, что коэффициенты термодиффузии многокомпонентной смеси, используемые в работах [1 и 3], отличаются множителем, выражающимся через парциальную плотность i -й компоненты ($D_{i11}^T = \rho_i D_{i11}^T$).

коэффициенты диффузии D_{ik} являются симметричными, т.е. $D_{ik} = D_{ki}$.
Равенство (1.78) можно представить в виде

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N D_{jk} \left(\frac{n_i n_j}{D_{ij}} - \frac{n_i n_j D_{ik}}{D_{ij} D_{jk}} \right) = n^2 (c_i - \delta_{ik}). \quad (1.79)$$

Замечая, что из соотношения (1.77) следует

$$m_i n_i D_{ik} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i n_j D_{jk}, \quad (1.80)$$

приведем (1.79) к следующей удобной для практических расчетов форме

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{n_i n_j}{D_{ij}} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^N \frac{m_j n_j n_s}{m_i D_{is}} \right) D_{jk} = n^2 (c_i - \delta_{ik}). \quad (1.81)$$

Для бинарной смеси из (1.81) получаются следующие выражения для коэффициентов диффузии:

$$D_{11} = n^2 n_2 m_2^2 D_{12} / (\rho^2 n_1) = \frac{m_1 m_2 \rho_2 n^2}{\rho_1 \rho^2} D_{12}, \quad (1.82)$$

$$D_{12} = D_{21} = - n^2 m_1 m_2 D_{12} / \rho^2 = - \frac{m_1 m_2 n^2}{\rho^2} D_{12}, \quad (1.83)$$

$$D_{22} = n^2 n_1 m_1^2 D_{12} / (\rho^2 n_2) = \frac{m_1 m_2 \rho_1 n^2}{\rho_2 \rho^2} D_{12}. \quad (1.84)$$

Для смеси, состоящей из трех компонент, типичные коэффициенты диффузии имеют вид

$$D_{11} = \frac{n^2}{\rho^2 n_1} \frac{n_1 n_3 m_3^2 D_{23} D_{31} + n_1 n_2 m_2^2 D_{12} D_{23} + (\rho_2 + \rho_3)^2 D_{31} D_{12}}{n_1 D_{23} + n_2 D_{31} + n_3 D_{12}}, \quad (1.85)$$

$$D_{12} = \frac{n^2}{\rho^2} \frac{n_3 m_3^2 D_{23} D_{31} - m_2 (\rho_1 + \rho_3) D_{12} D_{23} - m_1 (\rho_2 + \rho_3) D_{31} D_{12}}{n_1 D_{23} + n_2 D_{31} + n_3 D_{12}}. \quad (1.86)$$

Другие коэффициенты диффузии могут быть легко получены из (1.85) и (1.86) простой перестановкой индексов.

Соотношения Стефана - Максвелла, Скорость диффузии i -й компоненты в соответствии с равенством (1.75) может быть представлена в форме

$$\bar{V}_i = - \sum_j D_{ij} d_j - D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \quad (1.87)$$

По аналогии скорость диффузии j -й компоненты имеет вид

$$\bar{V}_j = - \sum_i D_{ij} d_i - D_j^T \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}}. \quad (1.88)$$

Вычитая из равенства (1.88) равенство (1.87), умножая полученный результат на величину $n_i n_j / (n^2 \mathfrak{D}_{ij})$ и производя суммирование по j , будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} (\bar{V}_j - \bar{V}_i) = & - \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}} \sum_j \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} (D_j^T - D_i^T) - \\ & - \sum_j \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} \left(\sum_i D_{ij} d_i - \sum_j D_{ij} d_j \right). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Второй член в правой части равенства (1.89), как нетрудно видеть, равен d_i . Действительно, умножая обе части соотношения (1.78)

на d_k и производя суммирование по k , найдем

$$\sum_j \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} \left(\sum_k D_{ik} d_k - \sum_k D_{jk} d_k \right) = \sum_k d_k \delta_{ik} - c_i \sum_k d_k = d_i, \quad (1.90)$$

поскольку $\sum_k d_k = 0$.

Таким образом, с учетом равенства (1.90) соотношения (1.88), иногда называемые соотношениями Стефана - Максвелла, принимают следующий вид:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} (\bar{V}_j - \bar{V}_i) = d_i - \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}} \sum_j \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} (D_j^T - D_i^T), \quad (1.91)$$

где d_i выражается равенством (1.76). Независимые соотношения Стефана - Максвелла (1.91), число которых равно $N-1$, широко используются в практических расчетах.

Если пренебречь термодиффузией и бародиффузией по сравнению с массовой диффузией, то соотношения (1.91) упростятся и примут вид

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{n_i n_j}{n^2 \mathfrak{D}_{ij}} (\bar{V}_j - \bar{V}_i) = \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left(\frac{n_i}{n} \right). \quad (1.92)$$

Используя связь между мольными и массовыми концентрациями (1.74), преобразуем (1.92) к виду

$$\frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{c_i c_j M}{M_j \mathfrak{D}_{ij}} (\bar{V}_j - \bar{V}_i) - \sum_{k=1}^N c_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{c_i c_j M}{M_j \mathfrak{D}_{kj}} (\bar{V}_j - \bar{V}_k). \quad (1.93)$$

Величина коэффициента диффузии бинарной смеси D_{ij} , введенного в [1], определяется выражением

$$D_{ij} = 0,0026280 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_i} + \frac{1}{M_j} \right)} \frac{T^{3/2}}{p \sigma_{ij}^2 \Omega_{ij}^{(1.1)*}(T_{ij}^*)} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}. \quad (1.94)$$

Значение величин σ_{ij} , $\Omega_{ij}^{(1.1)*}$, T_{ij}^* было раскрыто ранее в пояснениях к формуле (1.66) (см. также соотношения (1.69) и (1.70)).

Таблицы функции $\Omega_{ij}^{(1.1)*}(T_{ij}^*)$ для $0,3 \leq T_{ij}^* \leq 400$ приведены в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1].

Из формулы (1.94) видно, что коэффициенты диффузии для бинарной смеси D_{ij} , введенные в [1], нечувствительны к умеренным изменениям молекулярных весов компонент. Поэтому, если какая-либо газовая смесь состоит из двух групп компонент, каждая из которых имеет примерно одинаковый атомный или молекулярный вес и примерно одинаковые поперечные сечения столкновений, то эту смесь можно рассматривать как "эффективную" бинарную смесь, в которой каждая группа действует как одна компонента. Следует, однако, иметь в виду, что при расчете переноса энергии необходимо строго различать энтальпии отдельных компонент.

Для бинарной смеси из соотношений (1.75) и (1.76) с учетом равенств (1.82) - (1.84) нетрудно получить следующее выражение для диффузионного потока i -й компоненты

$$\begin{aligned} j_i = n_i m_i \bar{V}_i = & -(n^2/\rho) m_i m_j D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{n_i}{n} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n_i}{n} - \frac{n_i m_i}{\rho} \right) \frac{\partial \ln p}{\partial z} \right] - \rho_i D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Переходя в равенстве (1.95) от мольной концентрации $x_i = n_i/n$ к массовой концентрации c_i по соотношению (1.74) и замечая, что для бинарной смеси

$$\frac{\partial x_i}{\partial z} = \frac{m^2}{m_i m_j} \frac{\partial c_i}{\partial z}, \quad (1.96)$$

получим

$$j_i = -\rho c_i D_{ij} \left[\frac{\partial \ln c_i}{\partial z} + \frac{m_j - m_i}{m} c_j \frac{\partial \ln p}{\partial z} \right] - \rho c_i D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial z}. \quad (1.97)$$

В течениях типа пограничного слоя вклад бародиффузии в перенос массы всегда пренебрежимо мал по сравнению с вкладом массовой диффузии, так как давление постоянно поперек пограничного слоя.

Термодиффузия является эффектом второго порядка по сравнению с массовой диффузией, поэтому термодиффузией во многих случаях можно пренебречь. Способы вычисления коэффициентов термодиффузии подробно описаны в [3].

В турбулентном пограничном слое, где учет молекулярной диффузии необходим, как правило, лишь в пристеночной области, можно обычно ограничиться учетом лишь массовой диффузии. В этом случае равенство (1.97) принимает форму, известную под названием закона Фика

$$j_i = - \rho D_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \quad (1.98)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в некоторых случаях, например в смесях легких и тяжелых компонент, вклад термодиффузии в перенос массы может стать достаточно заметным и к указанной выше оценке следует относиться с известной осторожностью.

4.3. Перенос энергии в многокомпонентных газовых потоках.

Вектор плотности потока энергии $\underline{q}$ для многокомпонентной смеси одноатомных газов, полученный как результат решения уравнения Больцмана в первом приближении, имеет вид [3]

$$\underline{q} = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_i \rho c_i \bar{V}_i h_i + \rho \sum_i k_{Ti} \bar{V}_i \quad (1.99)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности, h_i — энтальпия i -й компоненты на единицу веса, равная

$$h_i = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_i} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_i} T, \quad (1.100)$$

R — универсальная газовая постоянная, k_{Ti} — термодиффузионные отношения, определяемые равенствами

$$\sum_j D_{ij} k_{Tj} = D_i^T, \quad \sum_i k_{Ti} = 0. \quad (1.101)$$

Из выражения (1.99) видно, что в многокомпонентных смесях перенос энергии осуществляется посредством трех механизмов. Первый член в правой части (1.99) характеризует перенос энергии за счет теплопроводности, второй член — перенос энергии за счет переноса массы посредством всех видов диффузии (массовой диффузии, бародиффузии и термодиффузии), третий член характеризует дополнительный поток энергии, обусловленный так называемым диффузионным термоэффектом (эффект Дюфура).

Для смеси газов, состоящих из многоатомных молекул, вектор плотности потока энергии имеет тот же вид, что и для смеси одноатомных газов (1.99), с тем отличием, что под энтальпией h_i следует подразумевать величину, равную сумме

$$h_i = \left(\frac{5}{2} kT + e_i \right) \frac{1}{m_i}, \quad (1.102)$$

где e_i — энергия внутренних степеней свободы.

Таблица 2

i	O_2	O	N_2	N	
$h_i^0 \quad \frac{\text{кал}}{\text{моль}}$	0	59548	0	112974	

В практических расчетах удобнее вместо равенства (1.102) использовать выражение

$$h_i = \int_{T_0}^T c_{pi}(T) dT + h_i^0. \quad (1.103)$$

Здесь $c_{pi}(T)$ — удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном давлении, h_i^0 — теплота образования i -й компоненты при стандартных условиях. Для вычисления теплоемкостей и энтальпий отдельных компонент смеси удобно использовать аппроксимации, приведенные в [13]. Значения теплот образования некоторых веществ при нормальном давлении и стандартной температуре $T_0 = 293 \text{ K}$ приводятся в табл. 2 [14].

В течениях типа пограничного слоя принято считать, что вклад диффузионного термоэффекта в перенос энергии обычно невелик, поэтому с достаточной для практики степенью точности можно принять для вектора плотности потока энергии в многокомпонентной смеси выражение

$$\underline{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \underline{r}} + \sum_i \rho c_i \bar{V}_i h_i. \quad (1.104)$$

Выражение для коэффициента теплопроводности смеси одноатомных газов, состоящей из N компонент, полученное Кертиссом и Макенфуссом [15] в результате решения уравнения Больцмана в первом приближении, имеет вид [3]

$$\lambda = - \frac{\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \dots & \Lambda_{N1} & x_1 \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{N2} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1N} & \Lambda_{2N} & \dots & \Lambda_{NN} & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \dots & \Lambda_{N1} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1N} & \Lambda_{2N} & \dots & \Lambda_{NN} \end{vmatrix}} \quad (1.105)$$

Диагональные элементы определителей, входящих в соотношение

NO	H ₂	H	H ₂ O	CO	CO ₂
21 600	0	52 096	-57 786	-26425	-94 054

(1.105), выражаются равенством

$$\Lambda_{ii} = \frac{x_i^2}{\lambda_i} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i x_k}{2A_{ik}^* \lambda_{ik}} \frac{\frac{15}{2} m_i^2 + \frac{25}{4} m_k^2 - 3m_k^2 B_{ik}^* + 4m_i m_k A_{ik}^*}{(m_i + m_k)^2}. \quad (1.106)$$

Нondiagonальные элементы определителей имеют вид

$$\Lambda_{ij} = - \frac{x_i x_j m_i m_j}{2A_{ij}^* \lambda_{ij} (m_i + m_j)^2} \left(\frac{55}{4} - 3B_{ij}^* - 4A_{ij}^* \right). \quad (1.107)$$

Здесь λ_i — коэффициент теплопроводности чистого одноатомного газа

$$\lambda_i = \frac{25 (\pi m_i kT)^{3/2}}{32 \pi G_i \Omega_i^{(2,2)*}} \cdot \frac{3k}{2m_i}. \quad (1.108)$$

Нетрудно видеть, что коэффициент λ_i связан с коэффициентом вязкости i -й компоненты μ_i , выражаемым равенством (1.65), простым соотношением

$$\lambda_i = \frac{5}{2} \mu_i c_{vi}, \quad c_{vi} = \frac{3k}{2m_i}. \quad (1.109)$$

Коэффициент λ_{ij} имеет вид

$$\lambda_{ij} = \frac{25}{32} \frac{(2\pi m_{ij} kT)^{3/2}}{\pi G_{ij}^2 \Omega_{ij}^{(2,2)*}} \cdot \frac{3k}{4m_{ij}}. \quad (1.110)$$

Входящие в выражение (1.110) величины определяются так же, как в формуле (1.66) для коэффициента μ_{ij} , с которым коэффициент λ_{ij} связан соотношением

$$\lambda_{ij} = \mu_{ij} \frac{5}{2} \frac{3k}{4m_{ij}}, \quad m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}. \quad (1.111)$$

Коэффициенты A_{ij}^* , B_{ij}^* , C_{ij}^* выражаются равенствами

$$A_{ij}^* = \frac{\Omega_{ij}^{(2,2)*}}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}}, \quad B_{ij}^* = \frac{5\Omega_{ij}^{(1,2)*} - 4\Omega_{ij}^{(1,3)*}}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}}, \quad C_{ij}^* = \frac{\Omega_{ij}^{(1,2)*}}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}}. \quad (1.112)$$

Интегралы соударений $\Omega_{ij}^{(1,1)*}$, $\Omega_{ij}^{(2,2)*}$, $\Omega_{ij}^{(1,2)*}$ и $\Omega_{ij}^{(1,3)*}$,

как функции характеристической температуры T_{ij}^* , затабулированы для потенциала Леннарда - Джонса в монографии Гиршфельдера, Кертиса и Берда [1], для некоторых других потенциалов аналогичные таблицы даны в книге Ферцигера и Капера [3].

Существенно более простой способ определения коэффициента теплопроводности смеси одноатомных газов указали Мэсон и Саксена [16], предложившие формулу

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(1 + 1,065 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N G_{ik} \frac{x_k}{x_i} \right)^{-1}, \quad (1.113)$$

где функция G_{ik} выражается равенством (1.72). Теми же авторами формула (1.113) была обобщена на смеси многоатомных газов. В этом случае в правую часть (1.113) вместо λ_i следует подставить коэффициент теплопроводности многоатомного газа λ'_i , связанный с λ_i с помощью уточненного поправочного множителя Эйкена [17]

$$\lambda'_i = \lambda_i \left(0,115 + 0,354 \frac{c_{pi}}{R_i} \right), \quad (1.114)$$

а вместо функции G_{ik} подставить функцию G'_{ik}

$$G'_{ik} = \frac{[1 + (\lambda_i / \lambda_k)^{1/2} (M_i / M_k)^{3/4}]^2}{2^{3/2} [1 + (M_i / M_k)]^{1/2}}. \quad (1.115)$$

Величины c_{pi} и R_i , входящие в правую часть соотношения (1.114), являются коэффициентами удельной теплоемкости i -й компоненты при постоянном давлении и газовой постоянной для i -й компоненты соответственно.

Формула Мэсона и Саксена приводит к результатам, вполне удовлетворительно согласующимся с опытными данными для смесей одноатомных газов, а в ряде случаев и смесей многоатомных газов. Оценки точности этой формулы, а также других полуэмпирических соотношений можно найти в неоднократно цитированной выше книге Ферцигера и Капера [3], а также монографии Бретштайдера [11].

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА

5.1. Естественная форма уравнений. Приведенные в предыдущем параграфе выражения для вектора плотности потока массы (скорости диффузии) i -й компоненты (1.75), тензора давлений (1.62) и вектора плотности потока энергии (1.99) позволяют исключить из газодинамических уравнений переноса (§ 3) микропараметры и записать эти уравнения в макроскопической форме. Однако, прежде чем сделать это, соберем все уравнения переноса вместе, сохранив их векторно-тензорную запись. Уравнение неразрывности для смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot (\rho \underline{v}) = 0, \quad (1.116)$$

уравнение неразрывности для i -й компоненты

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} = w_i - \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{j}_i \quad (1.117)$$

уравнение движения

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \left(\underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \right) \underline{v} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{P} \right), \quad (1.118)$$

уравнение энергии

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial E}{\partial \underline{r}} = - \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{q} - \left(\underline{P} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \right) \cdot \underline{v}. \quad (1.119)$$

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1.116) – (1.119), связывающую пять неизвестных $\underline{v}$, ρ , p , c_i и E (или T), к этой системе необходимо добавить уравнение состояния для смеси

$$p = R \rho T \sum_i \frac{c_i}{M_i}. \quad (1.120)$$

Подставляя в уравнение движения (1.118) вместо тензора давлений его выражение (1.62), получим следующую основную форму этого уравнения

$$\rho \frac{d \underline{v}}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial \underline{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{\mu} \dot{\underline{S}}. \quad (1.121)$$

Здесь и далее

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}}. \quad (1.122)$$

В уравнении энергии (1.119) перейдем от внутренней энергии E к энтальпии h , связанной с нею формулой

$$h = E + p/\rho, \quad (1.123)$$

одновременно заменив тензор давлений по (1.62); будем иметь

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{q} + 2\mu \left(\dot{s} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \right) \cdot \underline{v}. \quad (1.124)$$

Имея в виду равенство

$$\left(\dot{s} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \right) \cdot \underline{v} = \dot{s}^2, \quad (1.125)$$

преобразуем уравнение (1.124) к виду

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{q} + 2\mu \dot{s}^2. \quad (1.126)$$

Приведем еще одну форму уравнения энергии, легко получаемую из уравнения (1.119) с использованием равенств (1.118), (1.62), (1.122) и (1.123),

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \underline{q} + 2 \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot (\mu \dot{s} \cdot \underline{v}). \quad (1.127)$$

Величину

$$H = h + \frac{v^2}{2} \quad (1.128)$$

будем в дальнейшем называть полной энтальпией газа.

В уравнение неразрывности для i -й компоненты подставим выражение для вектора плотности потока массы (1.75), используя при этом соотношение (1.76) и заменяя мольную концентрацию $x_i = n_i / n$ на массовую концентрацию c_i по формуле (1.74); получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} = w_i + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \left\{ \rho c_i \sum_j D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{r}} (c_j M) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_j (M - M_j) \frac{\partial \ln p}{\partial \underline{r}} \right] + \rho c_i D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.129)$$

Если пренебречь бародиффузией и термодиффузией по сравнению с массовой диффузией, то уравнение (1.129) примет вид

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} = w_i + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \left[\rho c_i \sum_j D_{ij} \frac{\partial}{\partial \underline{r}} (c_j M) \right]. \quad (1.130)$$

В случае бинарной смеси уравнение (1.130) записывается в форме

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} = w_i + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \left(\rho D_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} \right). \quad (1.131)$$

Теперь обратимся к рассмотрению уравнения энергии в форме (1.127). Подставив в это уравнение выражения векторов плотностей потоков энергии (1.99) и массы (1.75), (1.76),

будем иметь

$$\begin{aligned} \rho \frac{dH}{dt} = & \frac{\partial p}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial \underline{r}} (\mu \dot{s} \cdot \underline{v}) + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial \underline{r}} + \right. \\ & + \sum_i \rho c_i h_i \sum_j D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{r}} (c_j M) + c_j (M - M_j) \frac{\partial \ln p}{\partial \underline{r}} \right]_1 + \\ & + \sum_i \rho c_i D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}} h_i - p \sum_i k_{Ti} \left[\sum_j D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial \underline{r}} (c_j M) + \right. \right. \\ & \left. \left. + c_j (M - M_j) \frac{\partial \ln p}{\partial \underline{r}} \right]_3 + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \underline{r}} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Как отмечалось выше, в течениях типа пограничного слоя вклад бародиффузии в перенос массы и энергии весьма незначителен. Вклад термодиффузии в перенос массы и энергии (диффузионный термоэффект) обычно также невелик. Пренебрегая указанными эффектами, получим следующую форму уравнения энергии:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dH}{dt} = & \frac{\partial p}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial \underline{r}} (\mu \dot{s} \cdot \underline{v}) + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial \underline{r}} + \right. \\ & \left. + \sum_i \rho c_i h_i \sum_j D_{ij} \frac{\partial}{\partial \underline{r}} (c_j M) \right]. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Принимая во внимание, что

$$h = \sum_i c_i h_i, \quad h_i = \int_{T_0}^T c_{pi} dT + h_i^0 \quad (1.134)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \underline{r}} = \frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{r}} - \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} \right), \quad c_p = \sum_i c_i c_{pi}, \quad (1.135)$$

преобразуем уравнение (1.133) к виду

$$\begin{aligned} \rho \frac{dH}{dt} = & \frac{\partial p}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial \underline{r}} (\mu \dot{s} \cdot \underline{v}) + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{r}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \underline{r}} \right) + \sum_i \rho c_i h_i \sum_j D_{ij} \frac{\partial}{\partial \underline{r}} (c_j M) \right], \end{aligned} \quad (1.136)$$

где

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (1.137)$$

— число Прандтля.

Для бинарной смеси уравнение (1.136) принимает вид

$$\rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \cdot (\mu S \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial z} + \sum_i (Le_{ij} - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial z} \right]; \quad (1.138)$$

здесь

$$Le_{ij} = \rho D_{ij} c_p / \lambda \quad (1.139)$$

— число Льюиса. Уместно отметить, что если число Льюиса равно единице, то уравнение энергии имеет такой же вид, как обычное уравнение энергии для однородного по составу газа.

Производным от чисел Прандтля и Льюиса является число Шмидта

$$Sc_{ij} = \frac{Pr}{Le_{ij}} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}}. \quad (1.140)$$

Нетрудно видеть, что в бинарных смесях числа Прандтля, Льюиса и Шмидта не являются, строго говоря, параметрами подобия, поскольку зависят от состава смеси и, следовательно, от определяющих параметров конкретной задачи. Тем не менее в ряде случаев приближенно пользуются некоторыми из рассматриваемых параметров как критериями подобия, поскольку их зависимость от состава смеси оказывается достаточно слабой. Например, в двухкомпонентной смеси, состоящей из атомов и двухатомных молекул (диссоциация чистого кислорода или азота), число Прандтля слабо зависит от состава (степени диссоциации) и может считаться постоянным в широком диапазоне температур. В то же время числа Льюиса и Шмидта для двухатомных диссоциирующих газов заметно зависят от состава и могут рассматриваться как параметры подобия лишь в сравнительно узком температурном диапазоне.

5.2. Тензорная форма уравнений переноса. В ряде случаев оказывается удобной тензорная форма приведенных выше уравнений переноса. Тензорная форма предусматривает использование индексов для обозначения проекций величин на оси координат, причем дважды повторяющиеся индексы будут означать суммирование по значениям 1, 2, 3, соответствующим компонентам векторов и тензоров, соответственно по осям x, y, z (на индекс i , используемый для обозначения номера компоненты смеси, это правило не распространяется).

Уравнение неразрывности для смеси газов (1.116) в этих обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j) = 0. \quad (1.141)$$

Уравнение неразрывности для i -й компоненты (1.117) преобра-

зуюм с помощью уравнения (1.141) к дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_i) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\rho v_j c_i) = w_i + \frac{\partial}{\partial s_j} j_{ij}. \quad (1.142)$$

Здесь j_{ij} — проекция диффузионного потока i -й компоненты на ось j .

Для записи уравнений переноса количества движения (1.118) воспользуемся уравнением (1.141) и выражением для тензора давлений (1.62). При этом для удобства введем в рассмотрение тензор вязких напряжений

$$\tau_{jk} = 2\mu \dot{s}_{jk} = -\delta_{jk} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_i}{\partial s_i} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k}{\partial s_j} \right), \quad (1.143)$$

где $\dot{s}_{jk}$ — тензор скоростей деформаций, определяемый соотношениями (1.61). В результате будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\rho v_j v_k) = -\frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j}. \quad (1.144)$$

Уравнение переноса энергии (1.127) с учетом соотношения (1.143) и уравнения (1.141) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho h + \frac{\rho v_k^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\rho v_j h + \frac{1}{2} \rho v_j v_k^2 \right) = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_j}{\partial s_j} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{jk} v_k). \end{aligned} \quad (1.145)$$

Используя уравнение движения (1.144), преобразуем уравнение (1.145) к следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\rho v_j h) = \frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial s_k} + \tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - \frac{\partial q_j}{\partial s_j}. \quad (1.146)$$

Глава 2.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

§ 6. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ

6.1. Понятие турбулентности. Несмотря на широкое использование термина "турбулентность" в технике, а в последнее время нередко и в повседневной жизни, по-прежнему нелегко дать определение турбулентности, включающее все присущие явлению характерные особенности и соответствующие современным профессиональным взглядам на это явление. В связи с этим небезынтересно проследить, как менялись взгляды крупнейших в этой области специалистов на понятие турбулентности.

В 1937 г. Карман и Тейлор [18] определили турбулентность как "неупорядоченное движение, которое в общем случае возникает в жидкостях, газообразных или капельных, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой".

Спустя двадцать два года Хинце [18], отметив недостаточность этой формулировки, дал следующее определение турбулентности: "турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение по времени и пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения".

В определении Хинце, в отличие от предыдущего, содержится существенное указание на неупорядоченность турбулентного движения не только во времени, но и в пространстве, а также констатируется возможность изучения турбулентности статистическими методами.

Наконец, приведем определение турбулентности, данное П.Брэдшоу в 1971 г. [19]: "турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса".

Приведенные определения достаточно красноречиво характеризуют эволюцию взглядов на турбулентность по мере накопления и осмысления знаний об этом, несомненно, уникальном по своей сложности явлении природы. С одной стороны, для этой эволюции характерна преемственность, с другой – отчетливо проявляется все более углубленное понимание сути явления турбулентности. В то же время вполне очевидна и недоопределенность понятия турбулентности, свидетельствующая о том, что гидроаэродинамике предстоит пройти еще долгий и непростой путь, прежде чем контуры этого понятия приобретут четкие очертания и строгость.

6.2. Способы описания турбулентных течений сжимаемого газа.

При турбулентном течении поля скоростей, давлений, температур, концентраций и других газодинамических величин имеют весьма сложную структуру. Сложность структуры этих полей обусловлена крайне нерегулярным и случайным характером их изменения в пространстве и во времени. Если пространственно-временные масштабы турбулентности (т.е. минимальный пространственный размер турбулентной неоднородности и характерный период турбулентных пульсаций) много больше пространственно-временных масштабов молекулярного движения (т.е. соответственно средней длины свободного пробега молекул и среднего времени между двумя молекулярными столкновениями), то полученные в предыдущем параграфе уравнения переноса могут быть в принципе использованы для описания турбулентных движений.

Опыт показывает, что пространственно-временные масштабы турбулентности всегда существенно превосходят пространственно-временные масштабы молекулярных движений, и, следовательно, описание турбулентных течений с помощью дифференциальных уравнений переноса является вполне оправданным. Однако непосредственное использование этих уравнений оказывается практически невозможным, так как поля газодинамических величин в турбулентном потоке, будучи всегда нестационарными, очень сильно зависят от начальных условий, которые обычно известны далеко не полностью. Это означает, что полное, детальное описание турбулентных движений невозможно. Но на практике такое детальное знание полей газодинамических величин в большинстве случаев и не требуется, так как интерес представляют лишь осредненные (статистические) характеристики этих полей. То обстоятельство, что турбулентные движения описываются дифференциальными уравнениями переноса, приобретает в этом случае первостепенное значение, так как благодаря этому оказывается возможным установить, хотя и не полностью, связи между осредненными характеристиками полей газодинамических величин.

Приемы, позволяющие установить такого рода связи в случае течения несжимаемой изотермической жидкости, были впервые указаны Осборном Рейнольдсом [20]. К настоящему времени эти приемы довольно подробно описаны в литературе [6, 21], поэтому мы лишь вкратце напомним их сущность. Как известно, Рейнольдс предложил представлять значения всех газодинамических величин

в турбулентном потоке в виде суммы осредненных и пульсационных составляющих и изучать лишь осредненные величины, сравнительно плавно меняющиеся в пространстве и во времени. Для определения средних значений той или иной величины Рейнольдс предложил применять обычное осреднение по некоторому интервалу времени (временное осреднение). Отметим, что наряду с указанным способом осреднения возможны и другие, в частности осреднение по определенной области в указанный момент времени (пространственное осреднение) или осреднение для большого числа полей, изменяющихся как от точки к точке, так и от одного момента времени к другому (статистическое осреднение по ансамблю). Не обсуждая здесь преимущества и недостатки различных способов осреднения, отметим лишь, что применяемые обычно приборы позволяют измерять средние во времени значения величин;¹ поэтому наиболее целесообразным оказывается временное осреднение.

Следуя Рейнольдсу, представим теперь мгновенное значение каждой из неизвестных величин или их любой комбинации в виде суммы осредненной ($\bar{f}$) и пульсационной (f') составляющих

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.1)$$

Под осреднением будем понимать временное осреднение

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f \, dt, \quad (2.2)$$

причем интервал осреднения Δt предполагается достаточно большим по сравнению с характерным периодом пульсационного поля и существенно малым по сравнению с периодом осредненного поля. Если осредненное поле является стационарным, т.е. его период бесконечно велик, то среднее значение величины f будет выражаться равенством

$$\bar{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f \, dt \right]. \quad (2.3)$$

Как показал Рейнольдс, в процессе любого осреднения (не только временного) необходимо требовать выполнения следующих соотношений, полученных название условий Рейнольдса:

- 1) $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$;
- 2) $\overline{af} = a\bar{f}$, если $a = \text{const}$;
- 3) $\overline{a} = a$, если $a = \text{const}$;
- 4) $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial f}{\partial s}}$, где s - это x, y, z или t ;
- 5) $\overline{f g} = \bar{f} \bar{g}$.

¹ Подробное обсуждение вопроса о способах вычисления средних значений в теории турбулентности можно найти в цитированной выше монографии А.С. Монина и А.М. Яглома [21].

Полагая в соотношениях (2.4) последовательно $q = 1$, $q = \bar{h}$ и $q = h' = h - \bar{h}$ (штрихом здесь и далее обозначены пульсационные составляющие величин), получим следующие важные следствия из условий Рейнольдса:

$$\bar{\bar{t}} = \bar{t}, \quad \bar{\bar{t}'} = \bar{t} - \bar{t} = 0, \quad \bar{\bar{t}h} = \bar{t}\bar{h}, \quad \bar{\bar{t}h'} = \bar{t}\bar{h}' = 0. \quad (2.5)$$

Используя эти следствия, установим полезные для дальнейшего правила осреднения произведений двух и трех переменных величин

$$\overline{\bar{t}q} = (\bar{t} + \bar{t}')(\bar{q} + \bar{q}') = \bar{t}\bar{q} + \bar{t}'\bar{q}', \quad (2.6)$$

$$\overline{\bar{t}qh} = \bar{t}\bar{q}\bar{h} + \bar{t}\bar{q}'h' + \bar{q}\bar{t}'h' + \bar{h}\bar{t}'q' + \bar{t}'q'h'. \quad (2.7)$$

Пульсационная составляющая произведения двух переменных величин, очевидно, равна

$$\begin{aligned} (tq)' &= tq - \bar{t}\bar{q} = (\bar{t} + \bar{t}')(\bar{q} + \bar{q}') - \bar{t}\bar{q} = \\ &= \bar{t}\bar{q}' + \bar{t}'\bar{q} + \bar{t}\bar{q}' + \bar{t}'\bar{q}' - \bar{t}\bar{q} - \bar{t}'\bar{q}' = \\ &= \bar{t}'\bar{q}' + \bar{t}\bar{q}' + \bar{t}'\bar{q}' - \bar{t}'\bar{q}'. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Наряду с изложенным классическим способом осреднения иногда при описании турбулентных течений сжимаемого газа применяют несколько иные приемы осреднения, позволяющие в известной степени упростить форму уравнений осредненного турбулентного движения [22, 23]. Суть этих приемов, подробно описанных, в частности, в монографии Себеси и Смита [23], сводится в основном к введению средневзвешенных параметров потока. Например, осредненная скорость вводится соотношением

$$\bar{v}_j = \overline{\rho v_j} / \bar{\rho}. \quad (2.9)$$

Здесь прямая черта сверху по-прежнему означает временное осреднение (2.2).

Аналогично вводятся осредненные энтальпия, полная энтальпия, температура и концентрация:

$$\bar{h} = \overline{\rho h} / \bar{\rho}, \quad \bar{H} = \overline{\rho H} / \bar{\rho}, \quad \bar{T} = \overline{\rho T} / \bar{\rho}, \quad \bar{c}_i = \overline{\rho c_i} / \bar{\rho}. \quad (2.10)$$

Мгновенные значения параметров представляются, так же как в методе Рейнольдса, в виде сумм осредненных и пульсационных величин

$$\begin{aligned} v_j &= \bar{v}_j + v_j'', \quad h = \bar{h} + h'', \\ H &= \bar{H} + H'', \quad T = \bar{T} + T'', \quad c_i = \bar{c}_i + c_i''. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь v_j'' , h'' и т.д. — пульсации скорости, энтальпии и т.д., наложенные на средневзвешенные параметры.

Имея в виду первое из равенств (2.11), найдем

$$\rho v_j = (\bar{\rho} + \rho')(\bar{v}_j + v_j'') = \bar{\rho}\bar{v}_j + \rho'\bar{v}_j + \bar{\rho}v_j'' + \rho'v_j''.$$

Осредняя произведение ρv_j по времени в соответствии с равенством (2.2), получим

$$\overline{\rho v_j} = \bar{\rho} \tilde{v}_j + \overline{\rho' \tilde{v}_j} + \overline{\rho v_j''}.$$

Второй член в правой части полученного соотношения равен нулю, поскольку равно нулю среднее значение пульсации плотности ($\bar{\rho'} = 0$). Левая часть того же соотношения равна первому члену справа, что следует из определения $\tilde{v}_j$ (2.9). Таким образом, имеем

$$\overline{\rho v_j''} = 0. \quad (2.12)$$

Подобным же образом нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\overline{\rho h''} = 0, \quad \overline{\rho H''} = 0, \quad \overline{\rho T''} = 0, \quad \overline{\rho c''} = 0. \quad (2.13)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что средние значения пульсационных величин, обозначенных двумя штрихами, не равны нулю, т.е.

$$\overline{v_j''} \neq 0, \quad \overline{h''} \neq 0, \quad \overline{T''} \neq 0, \quad \overline{H''} \neq 0, \quad \overline{c''} \neq 0 \quad \text{и т.д.}$$

Приведем полезные для дальнейшего соотношения для полной энтальпии

$$H = h + \frac{1}{2} v_j v_j, \quad \rho H = \rho h + \frac{1}{2} \rho v_j v_j. \quad (2.14)$$

Преобразуем второе из равенств (2.14) к виду

$$\begin{aligned} \rho H &= \rho h + \frac{1}{2} \rho (\tilde{v}_j + v_j'') (\tilde{v}_j + v_j'') = \\ &= \rho h + \frac{1}{2} \rho \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \rho v_j'' \tilde{v}_j + \frac{1}{2} \rho v_j'' v_j''. \end{aligned}$$

Производя временное осреднение этого равенства и учитывая соотношения (2.12) и (2.10), получим

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \frac{1}{2} \overline{\rho v_j'' v_j''} / \bar{\rho}. \quad (2.15)$$

Замечая, кроме того, что

$$H = \tilde{H} + H'' = \tilde{h} + h'' + \frac{1}{2} (\tilde{v}_j + v_j'')^2 = \tilde{h} + h'' + \frac{1}{2} \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \tilde{v}_j v_j'' + \frac{1}{2} v_j'' v_j'',$$

и вычитая из полученного равенства предыдущее, найдем выражение для пульсационной составляющей полной энтальпии

$$H'' = h'' + \tilde{v}_j v_j'' + \frac{1}{2} v_j'' v_j'' - \frac{1}{2} \overline{\rho v_j'' v_j''} / \bar{\rho}. \quad (2.16)$$

Для давления удобнее сохранить общепринятое временное осреднение по соотношению (2.2), поскольку в опытах давление измеряется непосредственно.

Нетрудно установить связь между величинами, полученными путем осреднения двумя рассмотренными способами. Так, используя равенство (2.12), найдем

$$\overline{\rho v_i''} = (\bar{\rho} + \rho') \overline{v_i''} = 0,$$

или, иначе,

$$\overline{v_i''} = -\overline{\rho' v_i''} / \bar{\rho}.$$

Осредняя по времени первое из равенств (2.11), получим с учетом предыдущего

$$\tilde{v}_i - \bar{v}_i = -\overline{v_i''} = \overline{\rho' v_i''} / \bar{\rho}. \quad (2.17)$$

С другой стороны, умножая соотношение

$$v_i = \tilde{v}_i + v_i'' = \bar{v}_i + v_i'$$

на ρ и производя временное осреднение, будем иметь

$$\bar{\rho} \tilde{v}_i + \overline{\rho v_i''} = \bar{\rho} \bar{v}_i + \overline{\rho v_i'}.$$

Вследствие того, что $\overline{\rho v_i''} = 0$ в соответствии с соотношением (2.12), найдем

$$\tilde{v}_i - \bar{v}_i = \overline{\rho v_i'} / \bar{\rho} = (\bar{\rho} + \rho') \overline{v_i'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' v_i'} / \bar{\rho}. \quad (2.18)$$

Таким образом, на основании (2.17) и (2.18) имеем

$$\tilde{v}_i - \bar{v}_i = \overline{\rho' v_i'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' v_i''} / \bar{\rho}. \quad (2.19)$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{T} - \bar{T} = T' - T'' = \overline{\rho' T'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' T''} / \bar{\rho}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{h} - \bar{h} = \overline{\rho' h'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' h''} / \bar{\rho}. \quad (2.21)$$

Равенства (2.19) – (2.21) показывают, что различия между средними значениями величин, полученными двумя рассмотренными способами осреднения, определяются корреляциями этих величин с плотностью, т.е. выражениями вида: $\overline{\rho' v_i'}$, $\overline{\rho' v_i''}$, $\overline{\rho' T'}$, $\overline{\rho' T''}$ и т.д.

Вопрос о выборе того или иного способа осреднения в большой степени решается из соображений удобства; принципиальные соображения в связи с отмеченными выше различиями не играют большой роли.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Перейдем к выводу уравнений осредненного турбулентного движения. При этом воспользуемся системой уравнений переноса вязкого, теплопроводного многокомпонентного реагирующего газа, записанных в тензорной форме (1.141), (1.142), (1.144), (1.145) или (1.146).

7.1. Уравнение неразрывности для смеси. Применяя к уравнению неразрывности для смеси (1.141) операцию осреднения (2.2) и предполагая возможность перестановки этой операции с дифференцированием по координатам и по времени (четвертое из условий Рейнольдса (2.4)), получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j) = 0. \quad (2.22)$$

Используя первый способ осреднения, т.е. раскрывая член $\bar{\rho} \bar{v}_j$ в соответствии с правилами (2.6), будем иметь

$$\bar{\rho} \bar{v}_j = \bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v_j'}. \quad (2.23)$$

Таким образом, уравнение неразрывности для смеси принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{\rho' v_j'}) = 0. \quad (2.24)$$

В случае течения несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности (2.24) приобретает форму уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial s_j} = 0. \quad (2.25)$$

В случае стационарного течения уравнение неразрывности сжимаемого газа (смеси) (2.24) содержит, в отличие от уравнения несжимаемости (2.25), производные по координатам от осредненных расходов пульсационного движения. Недостаточность наших знаний об общей природе турбулентности не позволяет в настоящее время произвести в общем случае количественную оценку вклада члена $\frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{\rho' v_j'})$ в уравнение неразрывности.

Используя определение осредненной скорости как отношения среднего массового расхода к средней плотности, т.е. соотношение (2.9), получим из уравнения (2.22) уравнение неразрывности для смеси, явно не содержащее осредненного расхода пульсационного движения

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j) = 0. \quad (2.26)$$

Можно отметить, что уравнение (2.26) внешне оказалось более простым по сравнению с уравнением (2.24).

7.2. Уравнение переноса количества движения. Производя операцию осреднения (2.2) над уравнением переноса количества дви-

жения (1.144), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} v_j v_k) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial s_j}. \quad (2.27)$$

При первом способе осреднения ($v_j = \bar{v}_j + v'_j$) это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \bar{v}_k) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \bar{v}_j \bar{v}_k) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} [\bar{\tau}_{jk} - \overline{(\rho v'_j)' v'_k}] - \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' v'_k} - \overline{\rho' v'_j} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Используя уравнение неразрывности (2.24), можно преобразовать уравнение (2.28) к следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_j} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} [\bar{\tau}_{jk} - \overline{(\rho v'_j)' v'_k}] - \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' v'_k} - \overline{\rho' v'_j} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Уравнения (2.28) (или (2.29)) обычно принято называть уравнениями Рейнольдса для сжимаемого газа (смеси). В этих уравнениях

величины $-\overline{(\rho v'_j)' v'_k}$ имеют смысл компонент тензора дополнительных (турбулентных) напряжений, возникающих из-за наличия турбулентных пульсаций массового расхода и скорости. Эти дополнительные напряжения иногда называются напряжениями Рейнольдса.

В частном случае движения несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение (2.29) существенно упрощается и принимает вид

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v'_j v'_k}). \quad (2.30)$$

Уравнения (2.28) и (2.29) отличаются от уравнения (2.30) наличием членов, содержащих осредненные расходы пульсационного движения.

При использовании второго способа осреднения ($\tilde{v}_j = \bar{\rho} v_j / \bar{\rho}$) уравнение (2.27) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{v}_k) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_k) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v'_j v'_k}).$$

Переходя от дивергентной формы уравнения движения к обычной с помощью уравнения неразрывности (2.26), получим

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v'_j v'_k}). \quad (2.31)$$

Если заменить в последнем члене уравнения (2.31) плотность ρ в соответствии с равенством $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ и пренебречь корреляционным членом третьего порядка ($\overline{\rho' v_j'' v_k''}$), то уравнение движения (2.31) примет вид, совпадающий по форме с уравнением движения несжимаемой жидкости

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{v}_j \tilde{v}_k - \bar{\rho} \overline{v_j'' v_k''}). \quad (2.32)$$

Сопоставление этого уравнения с его более сложным аналогом — уравнением (2.29) свидетельствует о преимуществах второго способа осреднения перед первым. Будучи написанными с одинаковой точностью (с точностью до корреляционных членов третьего порядка), эти уравнения отличаются наличием во втором из них корреляционных членов второго порядка, содержащих пульсации плотности.

7.3. Уравнение переноса энергии. Осредняя уравнение (1.145) по соотношению (2.2) и используя, как и ранее, перестановочность операции осреднения с дифференцированием по координатам и по времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho h} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho v_k v_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho v_j h} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho v_j v_k^2} = \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{q}_j - \bar{v}_j \overline{v_k v_k}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Проведем в отдельности преобразование каждого из четырех членов левой части этого уравнения, применяя соотношения (2.6) — (2.8); будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho h} &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{h} + \overline{\rho' h'}), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho v_k v_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\bar{\rho} \bar{v}_k \bar{v}_k + \bar{\rho} \overline{v_k' v_k'} + 2 \bar{v}_k \overline{\rho' v_k'} + \overline{\rho' v_k' v_k'}], \\ \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho v_j h} &= \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v_j'}) \bar{h} + \overline{(\rho v_j)' h'}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v_j'}) \bar{h} + \overline{(\rho v_j)' \sum_i (c_i h_i)'}] = \\ &= \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v_j'}) \bar{h} + \sum_i c_i \overline{(\rho v_j)' h_i'} + \sum_i \bar{h}_i \overline{(\rho v_j)' c_i'} + \\ &\quad + \sum_i \overline{(\rho v_j)' c_i' h_i'}]. \end{aligned}$$

При преобразовании третьего члена левой части уравнения принято

во внимание, что в многокомпонентной смеси газов $h = \sum_i c_i h_i$, где c_i и h_i — массовая концентрация и энтальпия i -й компоненты.

Продолжая преобразования, рассмотрим четвертый член левой части уравнения энергии (1.145)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} v_j) (\overline{v_k v_k}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} [\bar{\rho} v_j \overline{v_k v_k} + (\bar{\rho} v_j)' (\overline{v_k v_k})'] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j + \bar{\rho}' v_j') (\bar{v}_k \bar{v}_k + \overline{v_k' v_k'}) + 2 \bar{v}_k (\bar{\rho} v_j)' v_k' + (\bar{\rho} v_j)' v_k' v_k']. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение (2.33), предварительно перегруппировав некоторые члены. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{p} (\bar{h} + \frac{1}{2} \bar{v}_k \bar{v}_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} \bar{p} \bar{v}_j (\bar{h} + \frac{1}{2} \bar{v}_k \bar{v}_k) &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{q}_j - \overline{v_{jk} v_k}) - \\ - \frac{\partial}{\partial s_j} \sum_i \bar{c}_i (\bar{\rho} v_j)' h_i' - \frac{\partial}{\partial s_j} \sum_i \bar{h}_i (\bar{\rho} v_j)' c_i' - \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}' h' + \frac{1}{2} \bar{p} \overline{v_k' v_k'} + \\ + \bar{v}_k \overline{\rho' v_k'}) - \frac{\partial}{\partial s_j} [\bar{\rho}' v_j' (\bar{h} + \frac{1}{2} \bar{v}_k \bar{v}_k) + \frac{1}{2} (\bar{\rho} \bar{v}_j + \bar{\rho}' v_j') \overline{v_k' v_k'} + \\ + \bar{v}_k (\bar{\rho} v_j)' v_k'] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\rho' v_k' v_k'} - \frac{\partial}{\partial s_j} \frac{1}{2} (\bar{\rho} v_j)' v_k' v_k' - \frac{\partial}{\partial s_j} \sum_i (\bar{\rho} v_j)' c_i' h_i' \end{aligned} \quad (2.34)$$

Последние три члена в правой части уравнения (2.34) содержат тройное произведение пульсаций и могут быть отброшены ввиду их малости. Полученное после отбрасывания этих членов уравнение легко может быть преобразовано с помощью уравнения неразрывности (2.24) и уравнения переноса количества движения (2.29) к следующему виду:

$$\begin{aligned} - \bar{p} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{p} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial s_j} &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + v_k' \frac{\partial \bar{p}'}{\partial s_j} - \frac{\partial}{\partial s_j} \left[\bar{q}_j + \sum_i \bar{c}_i (\bar{\rho} v_j)' h_i' + \right. \\ &+ \sum_i \bar{h}_i (\bar{\rho} v_j)' c_i' - (\bar{\rho} v_j)' v_k' \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_j} - \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_{jk}}{\partial s_j} \left. \right] + \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{v_{jk} v_k} - \\ - \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}' h' + \bar{p} \overline{v_k' v_k'}) - \bar{\rho}' v_k' \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} - \bar{\rho}' v_j' \frac{\partial \bar{h}}{\partial s_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j + \\ + \bar{\rho}' v_j') \overline{v_k' v_k'}]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Уравнение (2.35) представляет собой уравнение переноса энергии

в осредненном турбулентном движении, записанное с точностью до членов, содержащих тройные корреляции пульсационных величин.

В этом уравнении величина $(\rho v_j)' h_i'$ выражает перенос энергии i -й компоненты, обусловленный турбулентными пульсациями массового расхода и энтальпии i -й компоненты. Член $\sum_i \bar{c}_i (\rho v_j)' h_i'$ выражает суммарное количество энергии, переносимое всеми компонентами смеси за счет турбулентных пульсаций. Член $\sum_i (\rho v_j)' c_i' \bar{h}_i$ выражает перенос энергии за счет турбулентного переноса массы (турбулентной диффузии). Член $(\rho v_j)' v_k' \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_k}$ определяет собой скорость превращения энергии осредненного движения в энергию турбулентности как результат действия рейнольдсовых напряжений. Помимо рассмотренных членов, описывающих, как правило, основные механизмы переноса энергии, уравнение (2.35) содержит ряд других членов, выражающихся через корреляции пульсаций плотности, энтальпии и скорости. Оценка этих членов в общем случае затруднительна из-за отсутствия систематических экспериментальных данных.

Существенно более простым по форме оказывается уравнение энергии при использовании второго способа осреднения ($\tilde{v}_j = \bar{\rho} v_j / \bar{\rho}$, $\tilde{h} = \bar{\rho} h / \bar{\rho}$ и т.д.). При этом воспользуемся уравнением переноса энергии в форме (1.146). Подставим в это уравнение вместо v_j и h их выражения (2.11); для давления p , как это было принято, сохраним обычное представление $p = \bar{p} + p'$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{h} + \bar{\rho} h'') + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{v}_j + \bar{\rho} h'' \tilde{v}_j + \bar{\rho} v_j'' \tilde{h} + \bar{\rho} v_j'' h'') = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} + p') + (\tilde{v}_k + v_k'') \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{p} + p') + \tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - \frac{\partial q_j}{\partial s_j}. \end{aligned}$$

Производя в этом уравнении осреднение по времени в соответствии с соотношением (2.2) и принимая во внимание соотношения (2.13), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \\ & + v_k'' \frac{\partial p'}{\partial s_j} + \tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{q}_j + \overline{\rho v_j'' h''}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

В многокомпонентной смеси $h = \sum_i c_i h_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h'' & = \sum_i (c_i h_i)'' = \sum_i (c_i h_i - \bar{c}_i \bar{h}_i) = \sum_i [(\tilde{c}_i + c_i'')(\tilde{h}_i + h_i'') - \\ & - \bar{c}_i \bar{h}_i] = \sum_i (\tilde{c}_i \tilde{h}_i + c_i'' \tilde{h}_i + \tilde{c}_i h_i'' + c_i'' h_i'' - \bar{c}_i \bar{h}_i). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подставляя соотношение (2.37) в последний член уравнения (2.36), получим с учетом (2.13) и с точностью до членов, содержащих тройные корреляции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s_k} + \overline{v_k'' \frac{\partial \rho}{\partial s_j}} + \overline{v_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j}} - \\ - \frac{\partial}{\partial s_j}(\tilde{q}_j + \sum_i \tilde{h}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''} + \sum_i \tilde{c}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' h_i''}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Осредненная энтальпия смеси $\tilde{h}$ с точностью до членов, содержащих тройные корреляции, имеет вид

$$\tilde{h} = \sum_i (\tilde{c}_i \tilde{h}_i + \overline{c_i'' h_i''}). \quad (2.39)$$

Аналогичным образом можно получить из уравнения (1.145) уравнение переноса энергии, записанное через полную энтальпию

$$(H = h + v_k^2/2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j}(\overline{v_k v_{kj}} - \tilde{q}_j) - \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho v_j'' H''}. \quad (2.40)$$

Используя выражение для пульсации полной энтальпии (2.16) и пренебрегая корреляционными членами третьего порядка, приведем уравнение (2.40) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j}(\overline{v_k v_{kj}} - \tilde{q}_j) - \frac{\partial}{\partial s_j} \times \\ \times (\bar{\rho} \overline{v_j'' h''} + \bar{\rho} \tilde{v}_k \overline{v_k'' v_j''}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

В уравнении (2.41) заменим пульсацию энтальпии h'' в соответствии с равенством (2.37). Опуская простые преобразования, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{H}) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j}(\overline{v_k v_{kj}} - \tilde{q}_j) - \\ - \frac{\partial}{\partial s_j}(\bar{\rho} \tilde{v}_k \overline{v_k'' v_j''} + \sum_i \tilde{h}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''} + \sum_i \tilde{c}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' h_i''}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Из сравнения двух форм уравнения переноса энергии (2.35) и (2.38), полученных двумя способами осреднения, очевидно, что второй способ приводит к более простой форме уравнения.

7.4. Уравнение неразрывности для i -й компоненты. Осредняя уравнение неразрывности i -й компоненты (1.142), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho c_i} + \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho v_j c_i} = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{v_{ij}}. \quad (2.43)$$

Используя соотношение (2.6), преобразуем левую часть уравнения (2.43) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{c}_i + \overline{\rho' c'_i}) + \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j) \bar{c}_i + (\overline{\rho v_j})' c'_i] = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{c}_i + \overline{\rho' c'_i}) + \frac{\partial}{\partial s_j} [(\bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v'_j}) \bar{c}_i + (\overline{\rho v_j})' c'_i].$$

Подставив это равенство в левую часть уравнения (2.43) и совершая простые преобразования, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{c}_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j \bar{c}_i) &= \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} [\bar{j}_{ij} + (\overline{\rho v_j})' c'_i] - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' c'_i} - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{c}_i \overline{\rho' v'_j}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Переходя от дивергентной формы уравнения неразрывности (2.44) к обычной с использованием (2.24), будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial s_j} &= \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} [\bar{j}_{ij} + (\overline{\rho v_j})' c'_i] - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' c'_i} - \overline{\rho' v'_j} \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Из уравнения (2.45) видно, что при турбулентном движении, кроме переноса вещества, обусловленного молекулярной диффузией, имеет место перенос вещества, вызываемый перемешиванием, создаваемым пульсациями плотности, скорости и концентрации $(\overline{\rho v_j})' c'_i$. Про-

цесс переноса вещества в турбулентном потоке, обусловленный пульсациями плотности, скорости и концентрации, будем по аналогии с молекулярной диффузией называть турбулентной диффузией.

Применим теперь для вывода осредненного уравнения неразрывности i -й компоненты второй способ осреднения. Для этого в левой части уравнения (2.43) представим массовую концентрацию c_i и скорость v_j в виде (2.11). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho (\tilde{c}_i + c''_i)} + \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho (\tilde{v}_j + v''_j) (\tilde{c}_i + c''_i)} = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} \bar{j}_{ij}.$$

Используя соотношение (2.13), преобразуем предыдущее уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{c}_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{c}_i) = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{j}_{ij} + \overline{\rho v_j} c''_i). \quad (2.46)$$

Пренебрегая корреляционными членами третьего порядка $\overline{\rho' v_j'' c_i''}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{c}_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{c}_i) = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_{ij} + \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''}). \quad (2.47)$$

Второй способ осреднения, как это уже неоднократно отмечалось ранее при выводе других уравнений осредненного турбулентного движения, привел и в рассматриваемом случае к более простой форме уравнения, что непосредственно следует из сравнения уравнений (2.45) и (2.47).

Относительно существа операции осреднения массовой скорости образования i -й компоненты w_i заметим, что при выводе уравнения неразрывности i -й компоненты эта операция была фактически лишь обозначена. Вопрос о влиянии турбулентности на скорость химических реакций и способах осреднения величины w_i до настоящего времени не решен полностью¹.

7.5. Уравнение состояния. Осредняя уравнение состояния (1.120) и пренебрегая тройными корреляциями пульсационных величин, получим при первом способе осреднения

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \sum_i \frac{\bar{c}_i}{M_i} \left(1 + \frac{\overline{c_i' T'}}{\bar{c}_i \bar{T}} + \frac{\overline{c_i' p'}}{\bar{c}_i \bar{p}} + \frac{\overline{p' T'}}{\bar{p} \bar{T}} \right). \quad (2.48)$$

При втором способе осреднения нетрудно получить с той же точностью

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \sum_i \frac{\tilde{c}_i}{M_i} \left(1 + \frac{\overline{T'' c_i''}}{\tilde{T} \tilde{c}_i} \right). \quad (2.49)$$

7.6. Система уравнений осредненного турбулентного движения многокомпонентной реагирующей смеси газов. Уравнения (2.24), (2.29), (2.35), (2.45), (2.48) составляют систему уравнений осредненного турбулентного движения многокомпонентной реагирующей смеси газов. Отметим, что эта система получена с точностью до корреляционных членов третьего порядка на основе применения классического (так называемого первого) способа осреднения мгновенных значений параметров потока. Сразу же следует подчеркнуть, что эта система является незамкнутой и ее использование оказывается возможным лишь в некоторых частных случаях в рамках полумпирических теорий турбулентности.

¹ В настоящее время при использовании осредненного уравнения неразрывности для i -й компоненты в турбулентных потоках общепринято приближение, согласно которому под $\bar{w}_i$ подразумевается выражение (w_i) , в котором все переменные являются осредненными по времени.

По существу эквивалентная указанной, но более простая по форме система уравнений была получена путем применения второго способа осреднения в основе которого лежит введение средневзвешенных, точнее сказать, среднемассовых, параметров потока: скорости, энтальпии и т.д. В эту систему входят уравнения (2.26), (2.32), (2.38) или (2.42), (2.47), (2.49). Для удобства соберем все эти уравнения вместе

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{p} \tilde{v}_j) = 0, \quad (2.50)$$

$$\bar{p} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \bar{p} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{v}_{jk} - \bar{p} \overline{v_j'' v_k''}), \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{p} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \bar{p} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_j} &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_j}} + \overline{v_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j}} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s_j} (-\tilde{q}_j - \sum_i \tilde{h}_i \bar{p} \overline{v_j'' c_i''} - \sum_i \tilde{c}_i \bar{p} \overline{v_j'' h_i''}), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\bar{p} \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \bar{p} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial s_j} = \tilde{w}_i + \frac{\partial}{\partial s_j} (-\tilde{f}_{ij} - \bar{p} \overline{v_j'' c_i''}), \quad (2.53)$$

$$\bar{p} = \bar{p} R \tilde{T} \sum_i \frac{\tilde{c}_i}{M_i} \left(1 + \frac{\tilde{T}'' c_i''}{\tilde{T} \tilde{c}_i} \right). \quad (2.54)$$

Вместо уравнения энергии (2.52) иногда удобнее использовать уравнение для полной энтальпии

$$\begin{aligned} \bar{p} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \bar{p} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s_j} &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{q}_j - \sum_i \tilde{h}_i \bar{p} \overline{v_j'' c_i''} - \\ &- \sum_i \tilde{c}_i \bar{p} \overline{v_j'' h_i''} + \overline{v_k v_{jk}} - \bar{p} \tilde{v}_k \overline{v_k'' v_j''}). \end{aligned} \quad (2.55)$$

7.7. Уравнения переноса турбулентных напряжений. Уравнение кинетической энергии турбулентности. Наряду с уравнениями (2.50) - (2.55) широкое применение в теории турбулентных течений находят специальные уравнения, такие, как уравнения переноса рейнольдсовых напряжений, уравнение кинетической энергии турбулентности и некоторые другие. Ниже приводится вывод этих уравнений.

Умножим уравнение движения (1.144) на v_i (индекс i здесь и далее в этом пункте эквивалентен индексам j и k и не означает, как это было принято ранее, номера компоненты):

$$v_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j v_k) \right] = v_i \left[- \frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} \right]. \quad (2.56)$$

Поменяем местами индексы i и k в равенстве (2.56):

$$v_k \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j v_i) \right] = v_k \left[-\frac{\partial p}{\partial s_i} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} \right]. \quad (2.57)$$

Суммируя равенства (2.56) и (2.57) и совершая простые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j v_k) = & -v_i \frac{\partial p}{\partial s_k} - v_k \frac{\partial p}{\partial s_i} + \\ & + v_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} + v_k \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Разлагая мгновенные значения скоростей в уравнении (2.58) на средние и пульсационные составляющие: $v_i = \tilde{v}_i + v_i''$, $v_j = \tilde{v}_j + v_j''$, $v_k = \tilde{v}_k + v_k''$, а также представляя τ_{jk} в виде $\tau_{jk} = \bar{\tau}_{jk} + \tau_{jk}'$ и производя осреднение по времени, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_k) + \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_i'' v_k''}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j \tilde{v}_k + \tilde{v}_i \overline{\rho v_j'' v_k''} + \\ + \tilde{v}_j \overline{\rho v_i'' v_k''} + \tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_j''} + \overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) = & -\tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} - \overline{v_i'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} - \\ - \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_i} - \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_i}} + & \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial s_j} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial s_j} + \overline{v_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} + \overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial s_j}}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Далее обратимся к осредненному уравнению переноса количества движения (2.31). Записав это уравнение в дивергентной форме, умножим его на $\tilde{v}_i$. В результате будем иметь

$$\tilde{v}_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_k) \right] = \tilde{v}_i \left[-\frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) \right]. \quad (2.60)$$

Меняя местами индексы i и k в уравнении (2.60) и суммируя полученное уравнение с (2.60), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j \tilde{v}_k) = & -\tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} - \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_i} + \\ & + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) + \tilde{v}_k \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{ji} - \overline{\rho v_j'' v_i''}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Полагая в уравнении (2.61) $i = k$, приведем уравнение (2.61)

к форме так называемого уравнения кинетической энергии осредненного движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_i \right) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = - \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_i} + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{ji} - \overline{\rho v_i'' v_j''}). \quad (2.62)$$

Далее, возвращаясь к уравнению (2.59), вычтем из него уравнение (2.61). В итоге получим уравнение переноса турбулентных касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_i'' v_k''}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{v}_j \overline{\rho v_i'' v_k''}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) = \\ = - \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_i}} - \overline{v_i'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} + \overline{v_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} + \overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial s_j}} - \\ - \overline{\rho v_j'' v_k'' \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial s_j}} - \overline{\rho v_j'' v_i'' \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Уравнение для тензора напряжений Рейнольдса (2.63) содержит, кроме тензора напряжений $\overline{\rho v_i'' v_j''}$ и осредненной скорости $\tilde{v}_j$, неизвестные члены: третий член в левой части уравнения (третий центральный момент) и первый, второй, третий и четвертый члены правой части, непосредственно не выражающиеся через напряжения Рейнольдса. Таким образом, система уравнений (2.50) – (2.55) и (2.63) также не является замкнутой и для ее замыкания необходимы по-прежнему полуэмпирические гипотезы турбулентности.

В частном случае, когда $i = k$, уравнение (2.63) переходит в уравнение баланса турбулентной энергии или, иначе, в уравнение кинетической энергии турбулентных пульсаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_k'' v_k''} \right) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{v}_j \cdot \frac{1}{2} \overline{\rho v_k'' v_k''}) + \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{v_j'' \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_k'' v_k''} \right)} = \\ = - \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} + \overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} - \overline{\rho v_j'' v_k'' \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j}}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Второй член в правой части уравнения (2.64) можно представить в виде

$$\overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} = \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_k'' \tau_{jk}'} - \tau_{jk}' \overline{v_k''}). \quad (2.65)$$

Аналогичное преобразование можно осуществить с первым членом правой части

$$\overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} = \frac{\partial}{\partial s_k} (\overline{v_k'' p}) - \overline{p \frac{\partial v_k''}{\partial s_k}}. \quad (2.66)$$

Подставляя (2.65) и (2.66) в (2.64), приведем уравнение баланса турбулентной энергии к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{v}_j E_T) = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[-\overline{v_j'' \left(\frac{1}{2} \rho v_k'' v_k'' \right)} - \overline{v_k'' p} + \right. \\ \left. + \overline{v_k'' \tau'_{jk}} \right] + \overline{p \frac{\partial v_k''}{\partial s_k}} - \tau'_{jk} \frac{\partial \overline{v_k''}}{\partial s_j} - \overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь $E_T = \frac{1}{2} \overline{\rho v_k'' v_k''}$ — средняя плотность кинетической энергии пульсационного движения.

В уравнении (2.64) первый член слева характеризует изменение кинетической энергии турбулентности во времени, второй член левой части характеризует конвективный перенос той же субстанции, т.е. перенос энергии турбулентности осредненным течением; наконец, третий член слева выражает собой перенос энергии турбулентности за счет пульсаций скорости, т.е. за счет турбулентной вязкости (диффузии).

Рассмотрим далее члены правой части уравнения (2.64). Первый член выражает работу сил давления в пульсационном движении, второй — работу вязких напряжений в пульсационном движении, т.е. рассеяние турбулентной энергии вследствие вязкости; третий — описывает взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движений.

Физический смысл отдельных членов уравнения переноса турбулентных напряжений (2.63) можно легко установить, идентифицируя каждый из этих членов с соответствующими членами уравнения переноса кинетической энергии турбулентности (2.64).

Кроме рассмотренных выше специальных уравнений турбулентного движения, таких, как уравнение переноса турбулентных напряжений и уравнение переноса кинетической энергии турбулентности, в теории турбулентных течений применяются и иные уравнения, в частности уравнения для турбулентной вязкости, уравнения для масштаба турбулентности и т.д. В связи с тем, что эти уравнения до последнего времени применялись главным образом для анализа течений несжимаемой жидкости, здесь они не приводятся. Читателю, интересующемуся проблемами применения этих уравнений, рекомендуем обзорную работу [24], содержащую обширную библиографию по рассматриваемому вопросу, а также монографию В.М. Иевлева [25].

§ 8. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ РЕАГИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

8.1. Общие соображения. Система уравнений (2.50) – (2.55) допускает существенные упрощения при описании течений в тонких пограничных слоях, образующихся на стенках каналов или на поверхностях тел при их движении в газовой среде. Необходимо подчеркнуть, что указанное упрощение, т.е. вывод уравнений турбулентного пограничного слоя, не может быть в настоящее время достаточно строго теоретически обоснован.

Методологические трудности, возникающие при выводе уравнений турбулентного пограничного слоя из уравнений Рейнольдса, обусловлены прежде всего недостаточностью имеющихся сведений о структуре слоя и характере процессов переноса в нем, точнее, отсутствием количественных данных об определяющих процессы переноса в различных зонах слоя масштабах явлений и зависимости этих масштабов, т.е. пространственных размеров различных зон, а также характерных для этих зон скоростей и т.д., от числа Рейнольдса и других критериев подобия, что не позволяет применить при выводе уравнений турбулентного пограничного слоя строгие асимптотические методы. Укажем, что когда речь идет о недостаточности сведений о процессах переноса, то имеется ввиду прежде всего отсутствие рациональных связей между осредненными и пульсационными характеристиками потока в различных зонах слоя.

Отмеченные обстоятельства, по существу, вынуждают прибегнуть при выводе уравнений турбулентного пограничного слоя к интуитивным приемам, в основе которых лежат соображения об определенной аналогии между ламинарным и турбулентным пограничными слоями, подтвержденные в большей или меньшей степени опытными данными. Суть этих соображений кратко выражается в допущении о малости толщины пограничного слоя по сравнению с его продольными размерами и, как следствие этого, малости "продольных" производных от некоторых величин по сравнению с "поперечными".

Не претендуя на строгость, выведем уравнения турбулентного пограничного слоя в многокомпонентной реагирующей газовой смеси.

8.2. Стационарное плоское течение. Для простоты рассмотрим установившееся двумерное осредненное течение с осредненными скоростями $v_1 = u$ и $v_2 = v$ ($v_3 = 0$), соответствующими направлениям $s_1 = x$ вдоль поверхности тела (по потоку) и $s_2 = y$ по нормали к поверхности тела (рис. 1). Уравне-

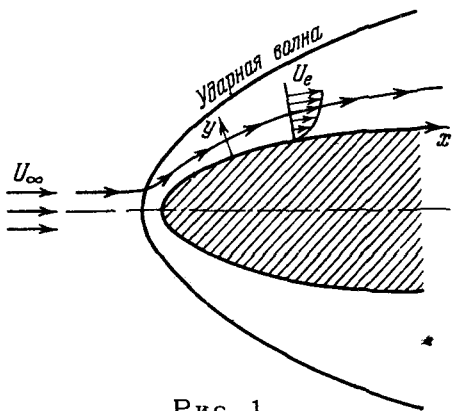


Рис. 1.

ния осредненного турбулентного движения (2.50), (2.51), (2.53) и (2.55) в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \tilde{v}) = 0, \quad (2.68)$$

$$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xx} - \bar{\rho} \overline{u''u''}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{xy} - \bar{\rho} \overline{u''v''}), \quad (2.69)$$

$$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{yx} - \bar{\rho} \overline{u''v''}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{yy} - \bar{\rho} \overline{v''v''}), \quad (2.70)$$

$$\bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial y} = \bar{w}_i + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\Gamma}_{ix} - \bar{\rho} \overline{u''c_i''}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\Gamma}_{iy} - \bar{\rho} \overline{v''c_i''}), \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} + \bar{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x}(-\bar{q}_x - \sum_i \tilde{h}_i \bar{\rho} \overline{u''c_i''} - \\ & - \sum_i \tilde{c}_i \bar{\rho} \overline{u''h_i''} + \overline{u\tau_{xx}} + \overline{v\tau_{yx}} - \bar{\rho} \tilde{u} \overline{u''u''} - \\ & - \bar{\rho} \tilde{v} \overline{v''u''}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\bar{q}_y - \sum_i \tilde{h}_i \bar{\rho} \overline{v''c_i''} - \sum_i \tilde{c}_i \bar{\rho} \overline{v''h_i''} + \\ & + \overline{u\tau_{xy}} + \overline{v\tau_{yy}} - \bar{\rho} \tilde{u} \overline{u''v''} - \bar{\rho} \tilde{v} \overline{v''v''}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Следуя основной идее Прандтля, разделим все поле течения на две области: тонкую область вихревого движения, прилегающую к поверхности тела, в которой параметры течения резко меняются от значений на поверхности до значений во внешнем потоке (пограничный слой), и область потенциального (безвихревого) течения (внешний поток). Толщину пограничного слоя δ^* будем считать малой величиной по сравнению с расстоянием x . Порядок величин x и u примем за единицу, т.е.

$$x \sim O(1) \quad u \sim O(1),$$

тогда

$$y \sim O(\delta^*) \quad v \sim O(\delta^*)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim O(1) \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} \sim O\left(\frac{1}{\delta^*}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim O(1) \text{ и } \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim O\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right).$$

Порядок величин давления, плотности, концентраций и энтальпии примем за единицу:

$$\rho \sim 0(1), \quad p \sim 0(1), \quad c_i \sim 0(1), \quad h \sim 0(1).$$

Будем полагать также, что члены уравнений (2.69) – (2.72), описывающие процессы молекулярного переноса, не превышают остальных членов.

Основываясь на приведенных оценках и сохраняя в уравнениях системы (2.68) – (2.72) члены одного и того же порядка, приведем эту систему к следующему виду (для упрощения записи знаки осреднения сохраним лишь в пульсационных членах):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (2.73)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} - \rho \overline{u''v''}), \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y}(\rho \overline{v''v''}), \quad (2.75)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{\partial}{\partial y}(j_{iy} - \rho \overline{v''c_i''}), \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y}(-q_y - \sum_i h_i \rho \overline{v''c_i''} - \\ & - \sum_i c_i \rho \overline{v''h_i''} + u \tau_{xy} - \rho u \overline{u''v''}). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Введем в рассмотрение полное касательное напряжение τ_Σ , полный массовый поток i -й компоненты $j_{i\Sigma}$, полный поток энергии q_Σ :

$$\tau_\Sigma = \tau_{xy} - \rho \overline{u''v''} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u''v''}, \quad (2.78)$$

$$j_{i\Sigma} = j_{iy} - \rho \overline{v''c_i''} = \rho c_i \bar{V}_{iy} - \rho \overline{v''c_i''}, \quad (2.79)$$

$$q_\Sigma = -q_y - \sum_i h_i \rho \overline{v''c_i''} - \sum_i c_i \rho \overline{v''h_i''}. \quad (2.80)$$

Здесь μ – вязкость многокомпонентной смеси (может быть определена по соотношениям, приведенным в § 4), $\bar{V}_{iy}$ – проекция ско-

рости диффузии на ось y (если пренебречь вкладом баро- и термодиффузии в перенос массы, то величина $\bar{V}_{iy}$ может быть определена по соотношениям Стефана - Максвелла (1.93)), q_{iy} - проекция вектора плотности потока энергии на ось y (см. формулу (1.99) и другие соотношения § 4).

Вследствие малости пульсаций поперечной скорости v'' в пограничном слое членом, стоящим в правой части уравнения (2.75), обычно можно пренебречь ($\rho \overline{v'' v''} \ll p$).

С учетом соотношений (2.78) - (2.80) система уравнений пограничного слоя (2.73) - (2.77) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0,$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, \quad (2.81)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{\partial}{\partial y} j_{i\Sigma},$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (q_{y\Sigma} + u \tau_x).$$

В плоском пограничном слое полная энтальпия H выражается через энтальпию h и проекцию скорости на ось y посредством равенства

$$H = h + \frac{u^2}{2}. \quad (2.82)$$

Подставляя равенство (2.82) в последнее уравнение системы (2.81) с учетом второго уравнения той же системы, получим

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} q_{y\Sigma} + \tau_x \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.83)$$

Вопрос о границах применимости системы уравнений пограничного слоя (2.81) для многокомпонентных потоков реагирующего газа до последнего времени остается практически не решенным. В связи с этим единственным критерием справедливости решений системы (2.81) в указанных условиях является эксперимент. Для однородных по составу сверхзвуковых потоков газа и не слишком больших интенсивностей теплообмена между газом и поверхностью в монографии Себеси и Смита [23] на основе оценок и анализа некоторых опытных данных по пульсационным характеристикам в турбулентных

пограничных слоях делается вывод о несущественном влиянии пульсаций плотности и пульсаций молекулярных коэффициентов переноса вплоть до чисел Маха, равных пяти.

Введенные равенствами (2.78) – (2.80) полные величины τ_Σ , $j_{i\Sigma}$, q_Σ не следует рассматривать всегда как простую сумму соответствующих молекулярных и турбулентных (молярных) величин. Необходимо иметь в виду, что в некоторых областях турбулентного пограничного слоя существенным становится взаимодействие процес-

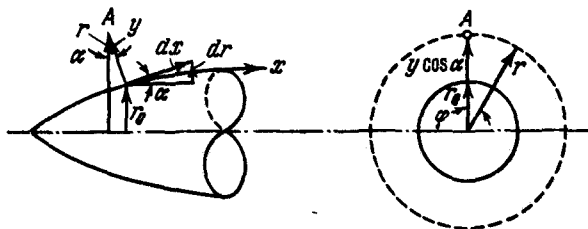


Рис. 2.

сов молекулярного и молярного переноса. Неучет этого обстоятельства может привести в ряде случаев к большим ошибкам, особенно при расчетах тепло- и массообмена в некоторых средах. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 11.

8.3. Осесимметричное течение. Уравнения турбулентного пограничного слоя на осесимметричном теле вращения, обтекаемом потоком под нулевым углом атаки, записанные через суммарные величины, имеют тот же вид, что и уравнения ламинарного пограничного слоя [26]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r) = 0,$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}(r \tau_\Sigma), \quad (2.84)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}(r j_{i\Sigma}),$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}[r(q_\Sigma + u \tau_\Sigma)].$$

Здесь

$$r(x, y) = r_0(x) + y \cos \alpha. \quad (2.85)$$

Система координат для осесимметричного течения изображена на рис. 2 (r_0 – радиус поперечной кривизны).

Для пограничного слоя, толщина которого δ много меньше радиуса поперечной кривизны r_0 ($\delta \ll r_0(x)$), система уравнений

(2.84) упрощается: уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v_0) = 0. \quad (2.86)$$

Остальные уравнения системы (2.84) приобретают форму уравнений для плоского течения в пограничном слое (2.81).

8.4. Уравнения пространственного турбулентного пограничного слоя. В системе координат, связанной с поверхностью тела так, например, как на рис. 3, уравнения пространственного турбулентного пограничного слоя на криволинейной поверхности, радиус кривизны которой много больше толщины пограничного слоя, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (2.87)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u''v''}), \quad (2.88)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u \frac{\partial w}{\partial y} - \rho \overline{w''v''}), \quad (2.89)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} + \rho w \frac{\partial c_i}{\partial z} = w_i + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u \frac{\partial c_i}{\partial y} - \rho \overline{v''c_i''}), \quad (2.90)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-q_y - \sum_i h_i \rho \overline{v''c_i''} - \right. \\ \left. - \sum_i c_i \rho \overline{v''h_i''} + \rho u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right) - \rho u \overline{v''u''} - \rho w \overline{v''w''} \right]. \quad (2.91)$$

Здесь полная энтальпия H выражается равенством

$$H = h + \frac{u^2 + w^2}{2}, \quad (2.92)$$

проекции векторов диффузионного потока (j_{iy}) и плотности потока энергии (q_y) на ось y сохраняют тот же вид, что и при плоском течении.

Проекции градиента давления на оси x и z связаны с проекциями скорости во внешнем потоке на те же оси (U_e и W_e), если внешний поток потенциальный, следующими соотношениями Бернулли:

$$U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + W_e \frac{\partial U_e}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.94)$$

$$U_e \frac{\partial W_e}{\partial x} + W_e \frac{\partial W_e}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.93)$$

8.5. Уравнение кинетической энергии турбулентных пульсаций. Применительно к стационарному плоскому течению в турбулентном пограничном слое уравнение переноса кинетической энергии турбу-

лентных пульсаций (2.67) принимает вид [23, 25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho u \overline{v'' v''} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \rho v \overline{v'' v''} \right) = & - \rho \overline{u'' v''} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \overline{v'' v''} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'' v''} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'' \cdot \frac{1}{2} \rho v'' v''} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{p v''}) - \mu \left(\frac{\partial v''}{\partial s_x} + \frac{\partial v''}{\partial s_k} \right) \frac{\partial v''}{\partial s_x}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

В уравнении (2.95) два члена в левой части уравнения описывают конвективный перенос энергии турбулентности; в правой части первый член характеризует производство энергии турбулентности, второй – диффузию энергии за счет вязкости, третий – турбулентный перенос энергии, четвертый – работу сил давления в пульсационном движении, пятый – диссипацию энергии турбулентности за счет вязкости.

Уравнение (2.95) наиболее широко использовалось для полуэмпирического описания процессов переноса в турбулентных пограничных слоях в несжимаемой жидкости. Достаточно подробно указанные результаты отражены в монографии В.М. Иевлева [25], обширную библиографию и обзор по рассматриваемому вопросу можно найти в работах [24, 93–94].

8.6. Переменные Крокко. В приведенных выше уравнениях турбулентного пограничного слоя в качестве независимых переменных использовались так называемые физические (естественные) переменные x, y . Эти переменные, играющие роль базовых переменных, удобны для проведения общего анализа свойств уравнений, являются исходными для преобразования уравнений к другим переменным, однако в конкретных приложениях в зависимости от специфических свойств исследуемого течения нередко возникает необходимость в использовании других переменных.

Вопрос о выборе тех или иных независимых переменных в теории турбулентного пограничного слоя, в частности при построении численных методов интегрирования системы уравнений турбулентного пограничного слоя, замкнутых с помощью тех или иных полуэмпирических гипотез турбулентности, имеет немаловажное значение. Это связано, прежде всего, с существенной нелинейностью самих уравнений, а также с необходимостью описания с помощью этих уравнений

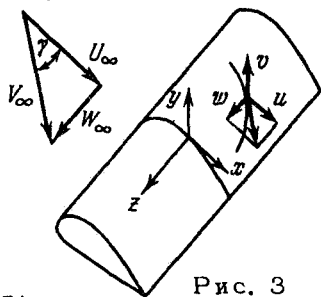


Рис. 3

течений с большой неоднородностью полей скорости, температуры, концентраций и т.д. Достаточно универсальных рекомендаций по выбору независимых переменных в настоящее время не существует. Вряд ли можно надеяться, учитывая чрезвычайное многообразие условий, в которых реализуется на практике турбулентный режим течения в пограничных слоях, а также многообразие применяемых полуэмпирических гипотез тур-

булентности, что в ближайшее время такие рекомендации будут сформулированы. В большой степени выбор независимых переменных обуславливается субъективным опытом и интуицией исследователя. Существенную роль вопрос о выборе переменных играет и при построении интегральных методов расчета. В связи с изложенными соображениями ниже приводятся уравнения турбулентного пограничного слоя, записанные через переменные Крокко. Эти переменные достаточно широко применялись при построении интегральных методов, накоплен некоторый опыт использования этих переменных в численных методах.

В системе уравнений (2.81) совершим переход от переменных x, y к новым переменным ξ, η , связанным между собой соотношениями

$$\xi = x, \quad \eta = u(x, y). \quad (2.96)$$

Для составления формул перехода воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Далее продифференцируем обе части второго из равенств (2.96) по ξ и η . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ 1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \omega \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Здесь принято во внимание первое из равенств (2.96), а также независимость переменных $x = \xi$ и η ; для удобства введено обозначение $\omega = \partial u / \partial y$.

Замечая из соотношений (2.98), что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\omega \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \omega, \quad (2.99)$$

получим из (2.97) с учетом выражений (2.99) окончательные формулы перехода от переменных x, y к переменным Крокко ξ, η

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \omega \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \omega \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (2.100)$$

Совершая переход по соотношениям (2.100) в уравнении неразрывности (первое из уравнений системы (2.81)), будем иметь

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \eta) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v) = 0. \quad (2.101)$$

Аналогично преобразуем второе из уравнений системы (2.81)

$$-\rho\eta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \rho v = \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} - \frac{dp}{d\xi} \frac{1}{\omega}. \quad (2.102)$$

При этом принято во внимание, что

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0.$$

Дифференцируя обе части уравнения (2.102) по η и вычитая полученный результат из (2.101), получим вместо двух первых уравнений системы (2.81) следующее уравнение:

$$\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho}{\omega} \right) + \frac{\partial^2 \tau_{\Sigma}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\omega} \right) \frac{dp}{d\xi} = 0. \quad (2.103)$$

Уравнение неразрывности для i -й компоненты (третье уравнение системы (2.81)) с учетом равенства (2.102) в новых переменных примет вид

$$\rho\eta \frac{\partial c_i}{\partial \xi} + \left(\omega \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} - \frac{dp}{d\xi} \right) \frac{\partial c_i}{\partial \eta} = w_i + \omega \frac{\partial}{\partial \eta} j_{i,\Sigma}. \quad (2.104)$$

Подобным же образом преобразуем уравнение энергии, входящее в систему (2.81),

$$\rho\eta \frac{\partial H}{\partial \xi} + \left(\omega \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} - \frac{dp}{d\xi} \right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial \eta} q_{\Sigma} + \tau_{\Sigma} + \eta \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} \right). \quad (2.105)$$

Уравнение энергии (2.83), записанное через энтальпию h , приводится к виду

$$\rho\eta \frac{\partial h}{\partial \xi} + \left(\omega \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} - \frac{dp}{d\xi} \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} = \eta \frac{\partial p}{\partial \xi} + \omega \left(\frac{\partial}{\partial \eta} q_{\Sigma} + \tau_{\Sigma} \right). \quad (2.106)$$

Система уравнений (2.103), (2.104), (2.105) (или (2.106)) эквивалентна системе (2.81). При использовании этих систем уравнений возникает необходимость в постулировании дополнительных связей между неизвестными величинами. В частности, связь между полным напряжением трения τ_{Σ} и параметром ω обычно принимается в форме соотношения Буссинеска (подробно об этом см. в § 11)

$$\tau_{\Sigma} = \mu_{\Sigma} \omega, \quad (2.107)$$

в котором полная вязкость μ_{Σ} определяется с помощью той или иной полуэмпирической гипотезы турбулентности. Подобные же подходы применяются для замыкания других уравнений переноса, входящих в рассматриваемые системы (подробно эти вопросы будут рассмотрены в § 11).

§ 9. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В теории пограничного слоя при построении приближенных интегральных методов расчета используются интегральные соотношения различного типа. Наиболее широко применялось и до сих пор находит применение интегральное соотношение импульсов, гораздо менее широко использовалось интегральное соотношение энергии, редко применялись интегральные условия сохранения i -й компоненты смеси и кинетической энергии турбулентности. В связи с этим ниже приводится вывод лишь первых двух из упомянутых интегральных соотношений.

9.1. Интегральное соотношение импульсов. Основой для получения этого соотношения служат уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r_0^\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r_0^\lambda) = 0, \quad (2.108)$$

где $\lambda = 0$ для плоского течения, $\lambda = 1$ — для осесимметричного течения, $r_0(x)$ — радиус поперечной кривизны осесимметричного тела, и уравнение переноса количества движения — второе уравнение системы (2.81).

Граничные условия на поверхности тела и внешней границе пограничного слоя для проекций скорости запишем в виде

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = v_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u &\rightarrow U_e \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Второе условие на стенке $v = v_w$ есть условие ее проницаемости.

Если стенка непроницаема, то $v_w = 0$; при $v_w > 0$ имеет место подача вещества в пограничный слой (вдув); случай $v_w < 0$ соответствует отсосу вещества из пограничного слоя.

Уравнение неразрывности (2.108) тождественно преобразуем к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u U_e) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v U_e) + \rho u U_e \frac{1}{r_0^\lambda} \frac{dr_0^\lambda}{dx} - \rho u \frac{dU_e}{dx} = 0. \quad (2.110)$$

Уравнение движения — второе из уравнений системы (2.81) — с помощью уравнения (2.108) запишем в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \rho u^2 \frac{1}{r_0^\lambda} \frac{dr_0^\lambda}{dx} - \rho U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}. \quad (2.111)$$

В последнем уравнении использована связь между продольным перепадом давления и скоростью на внешней границе пограничного слоя, даваемая уравнением Бернулли

$$-\frac{dp}{dx} = \rho U_e \frac{dU_e}{dx}. \quad (2.112)$$

Напомним, что уравнение Бернулли справедливо лишь при условии, что внешний поток является изэнтропическим.

Вычитая из уравнения (2.110) уравнение (2.111), придем к выражению

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u (U_e - u) + \frac{\partial}{\partial y} \rho v (U_e - u) + (\rho_e U_e - \rho u) \frac{dU_e}{dx} + \rho u (U_e - u) \frac{1}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} = - \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial y}.$$

Интегрируя это выражение поперек пограничного слоя по y от нуля до бесконечности и вводя в рассмотрение интегральные толщины:

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (2.113)$$

— толщину потери импульсов и

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e U_e}\right) dy \quad (2.114)$$

— толщину вытеснения, а также используя граничные условия для скорости (2.109), получим

$$\frac{d}{dx} (\rho_e U_e^2 \delta^{**}) + \delta^* \rho_e U_e \frac{dU_e}{dx} + \delta^{**} \rho_e U_e^2 \frac{1}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} = \tau_w + \rho_w v_w U_e, \quad (2.115)$$

где τ_w — напряжение трения на стенке.

Производя в (2.115) дифференцирование и замечая, что

$$\frac{\rho'_e}{\rho_e} = -M_e^2 \frac{U'_e}{U_e}, \quad (2.116)$$

после деления обеих частей уравнения на $\rho_e U_e^2$ получим интегральное соотношение импульсов

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'_e}{U_e} (2 + H^* - M_e^2) \delta^{**} + \frac{\delta^{**}}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e U_e^2} + \frac{\rho_w v_w}{\rho_e U_e}. \quad (2.117)$$

Здесь

$$H^* = \delta^* / \delta^{**} \quad (2.118)$$

— формпараметр пограничного слоя, $M_e = U_e / a_e$ — число Маха,

a_e — скорость звука на внешней границе пограничного слоя. Штрих означает производную по координате x . Заметим, что равенство (2.116) нетрудно получить из уравнения Бернулли (2.112),

записав его в виде

$$-\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_e \frac{d\rho_e}{dx} = \rho_e U_e \frac{dU_e}{dx}.$$

Вспомнивая теперь определение скорости звука

$$a_e^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_e, \quad (2.119)$$

сразу придем к (2.116).

Интегральное соотношение импульсов можно записать в несколько ином виде, приняв во внимание, что

$$a_e^2 = \gamma R T_e, \quad T_e \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right) = \text{const}$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} \frac{U'_e}{U_e} &= \frac{(M_e a_e)'}{M_e a_e} = \frac{M'_e}{M_e} + \frac{a'_e}{a_e} = \frac{M'_e}{M_e} + \frac{1}{2} \frac{T'_e}{T_e} = \\ &= \frac{M'_e}{M_e} - \frac{(\gamma-1) M_e^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \cdot \frac{M'_e}{M_e} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \frac{M'_e}{M_e}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

В результате получим

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{M'_e}{M_e} \frac{2 + \gamma - M_e^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \delta^{**} + \frac{\delta^{**}}{\gamma_0} \frac{d\gamma_0}{dx} = \frac{c_f}{2} + c_m. \quad (2.121)$$

Здесь

$$c_f = 2 \tau_w / (\rho_e U_e^2) \quad (2.122)$$

— местный коэффициент трения, а

$$c_m = \rho_w v_w / (\rho_e U_e) \quad (2.123)$$

— относительная массовая скорость вещества через поверхность.

Полученные выше различные формы интегрального соотношения импульсов могут быть использованы лишь для расчета пограничных слоев в изоэнтропических (безвихревых) потоках. При рассмотрении течений с большими сверхзвуковыми скоростями может возникнуть необходимость учета влияния завихренности внешнего потока, обусловленной искривлением головной ударной волны, на трение и теплообмен в пограничных слоях. Проведенные до настоящего времени исследования по рассматриваемой проблеме относятся в основном к ламинарным пограничным слоям [27–28]. Однако приближенный метод "среднемассовых величин", предложенный в работе В.В. Лулева [29], может быть применен и к турбулентным пограничным слоям.

9.2. Интегральное соотношение энергии. Уравнение энергии – четвертое из уравнений системы (2.81) – преобразуем с помощью уравнения неразрывности (2.108) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H) + \rho u H \frac{1}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}(q_\Sigma + u \tau_\Sigma). \quad (2.124)$$

Граничные условия при полной энтальпии имеют вид

$$\begin{aligned} H &= h_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ H &\rightarrow H_e \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Замечая, что $H_e = \text{const}$, запишем уравнение неразрывности в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u H_e) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H_e) + \rho u H_e \frac{1}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} = 0.$$

Вычитая из этого уравнения предыдущее и производя интегрирование поперек пограничного слоя по y от 0 до ∞ , с учетом граничных условий (2.125) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho u (H_e - H) dy - \rho_w v_w (H_e - H_w) + \\ + \frac{1}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} \int_0^\infty \rho u (H_e - H) dy = q_w, \end{aligned} \quad (2.126)$$

где q_w – тепловой поток от газа к стенке.

Вводя в рассмотрение интегральную толщину потери энергии

$$\delta_H^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{H}{H_e} \right) dy \quad (2.127)$$

и принимая во внимание равенство (2.116), получим интегральное соотношение энергии в следующем виде:

$$\frac{d\delta_H^{**}}{dx} + \frac{U_e'}{U_e} (1 - M_e^2) \delta_H^{**} + \frac{1}{r_0^2} \frac{dr_0^2}{dx} \delta_H^{**} = \frac{q_w + \rho_w v_w (H_e - h_w)}{\rho_e U_e H_e}. \quad (2.128)$$

Вводя в рассмотрение безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Стантона)

$$c_h = \frac{q_w}{\rho_e U_e (H_e - h_w)}, \quad (2.129)$$

где H_w – равновесная энтальпия теплоизолированной стенки, и ис-

пользуя равенства (2.120) и (2.123), приведем интегральное соотношение энергии (2.128) к следующей форме:

$$\frac{d\delta_H^{**}}{dx} + \frac{M_e'}{M_e} \frac{1-M_e^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2} \delta_H^{**} + \frac{1}{\gamma_0^3} \frac{d\gamma_0^3}{dx} \delta_H^{**} =$$

$$= c_h \frac{H_h - h_w}{H_e} + c_m \frac{H_e - h_w}{H_e}. \quad (2.130)$$

§ 10. О СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Структура турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости достаточно подробно описана в широко известных руководствах Л.Г. Лойцянского [6], К.К. Федяевского, А.С. Гиневского, А.В. Колесникова [30], С.С. Кутателадзе [31] и др. В настоящем параграфе этот вопрос будет рассмотрен лишь в той мере, в какой это необходимо для понимания и оценки существа классических и современных расчетных схем (моделей) турбулентного пограничного слоя и полуэмпирических гипотез турбулентности, применяемых для описания процессов переноса в рамках той или иной схемы; наряду с этим будут указаны специфические особенности структуры турбулентных пограничных слоев в сверхзвуковых потоках газа.

Выше уже неоднократно отмечалась чрезвычайная сложность структуры и процессов переноса в турбулентных пограничных слоях. В качестве одного из факторов, существенно затрудняющих исследование и понимание процессов переноса, назывался фактор многомасштабности (точнее, разномасштабности) тех конкурирующих процессов, взаимодействие которых обуславливает то, что принято называть единым, а по существу многоликим термином "турбулентность".

В связи с этим представляется целесообразным проследить эволюцию взглядов на структуру турбулентного пограничного слоя в историческом аспекте, тем более, что некоторые классические схемы еще могут быть, на наш взгляд, использованы с достаточной эффективностью для решения широкого круга новых задач, в которых не столько важна точность конечного численного результата, сколько оценка основных тенденций и суммарных эффектов.

Исторически первое, по-видимому, указание на "двухслойность" течения в турбулентном пограничном слое было сделано Прандтлем в работе, относящейся к 1910 г., т.е. задолго до формулировки первой полуэмпирической гипотезы турбулентности (гипотезы пути смещения) в 1925 г. Согласно представлению Прандтля вся область течения делится на две дискретные области: ламинарный (вязкий в современной терминологии) подслой и турбулентное ядро; между этими областями предполагается резкая граница (производные от продольной скорости по поперечной координате терпят разрыв). Подобные же воззрения были высказаны несколько позднее (в 1919 г.)

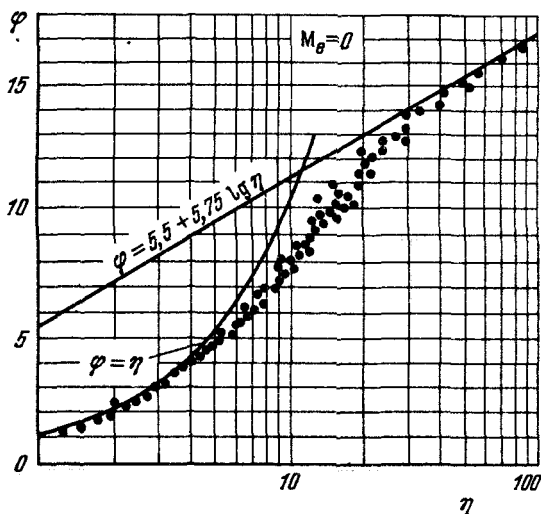


Рис. 4.

Тейлором [32]. Последующие экспериментальные исследования различных авторов в значительной степени подтвердили обоснованность двухслойной прандтлевской схемы. При этом, однако, выяснилось, что резкой границы между вязким подслоем и турбулентным ядром в действительности не существует. Как видно из рис. 4, на котором представлены в переменных закона стенки ($\varphi = u/v_*$, $\eta = y v_*/\delta$, $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$) опытные данные Никурадзе по профилям скорости, переход от чисто вязкого течения ($\varphi = \eta$) к турбулентному ($\varphi = 5,5 + 5,75 \lg \eta$) происходит непрерывно. Жизнеспособность двухслойной схемы Прандтля, согласно которой вязкий подслой занимал область пограничного слоя, непосредственно прилегающую к стенке, и ограниченную координатами

$$0 \leq \eta \leq \eta_{\pi} \quad (\eta_{\pi} = 12),$$

а турбулентному ядру отводилась вся оставшаяся часть пограничного слоя ($\eta > \eta_{\pi}$), была подтверждена многочисленными последующими

расчетами сопротивления на основе простейших полуэмпирических гипотез турбулентности (гипотез Прандтля – Кармана).

Однако если результаты расчетов интегральных динамических характеристик, таких, как коэффициенты сопротивления тел простейшей формы, интегральных толщин пограничного слоя, оказывались, как правило удовлетворительными (за исключением предотрывных и некоторых других типов течений), то расчет тепловых характеристик в трубах, на пластине для жидкостей с числами Прандтля, заметно превышающими единицу, привел к большим погрешностям в оценке коэффициентов теплоотдачи.

Последующие исследования убедительно показали, что причина неудач в применении двухслойной схемы к расчету тепловых харак-

теристик, заключена в неучете взаимодействия процессов молекулярного и турбулентного переноса на стыке двух областей. Предложенная Карманом в 1934 г. трехслойная схема пограничного слоя предусматривала существование между вязким подслоем и турбулентным ядром переходной (буферной) области. Использование более гладкого, чем в прандтлевской схеме, профиля скорости позволило существенно расширить диапазон чисел Прандтля, в котором расчет тепловых характеристик хорошо согласовывался с опытными данными.

В дальнейшем в работах Л.Г. Лойцянского и ряда других советских ученых была предложена эффективная теория тепло- и массообмена в турбулентных потоках при очень больших числах Прандтля и Шмидта (см. § 119 учебного пособия Л.Г. Лойцянского [6]).

Возвращаясь к оценке роли и значения классической двухслойной прандтлевской схемы, уместно отметить, что при расчетах сопротивления в несжимаемой жидкости в рамках тех или иных простейших полуэмпирических гипотез турбулентности, было возможно, и это использовалось во многих методах, "игнорировать" существование вязкого подслоя. Причина "нечувствительности" интегральных методов расчета к учету или неучету вязкого подслоя заключается в том, что в несжимаемой жидкости эта область обычно занимает не более 1% от толщины слоя; ясно, что в таких условиях при расчете интегральных характеристик слоя в целом неточность в описании процессов переноса количества движения оказывалась несущественной. Однако при расчетах тепло- и массообмена эта хотя и относительно тонкая область играет большую роль, и детальное описание процессов переноса в ней оказывается, как правило, необходимым.

Современные представления о структуре пристеночной части турбулентного пограничного слоя, по существу, мало чем отличаются от представлений, положенных в основу трехслойной кармановской схемы (речь идет, конечно, не о способах описания процессов переноса в этих областях, а о представлениях физических).

Согласно современным взглядам турбулентный пограничный слой включает по меньшей мере пять областей: вязкий подслой, переходную (буферную) область, область логарифмического профиля скоростей, область закона следа и область перемежаемости (надслой).

Схематически эти области показаны на рис. 5; протяженность областей на этом рисунке примерно соответствует структуре пограничного слоя на плоской пластине в несжимаемой жидкости.

Если измерять протяженность каждой из указанных областей переменной закона стенки ($\eta = y v_* / \delta$, $v_* = (v_w / \rho)^{1/2}$), то для течения на плоской пластине каждая из областей лежит примерно в следующих пределах:

вязкий подслой (область 1 на рис. 5): $0 \leq \eta \leq 5$;

переходная (буферная) область (область 2): $5 \leq \eta \leq 30$;

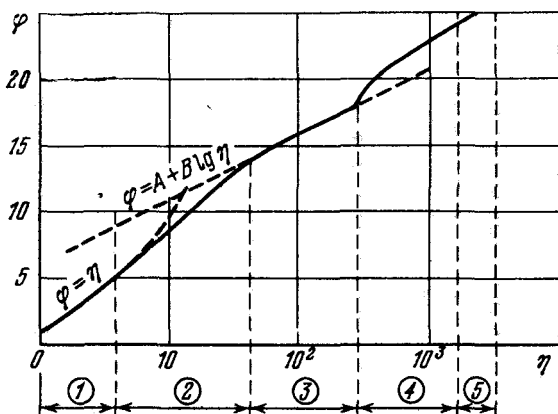


Рис. 5.

область логарифмического профиля скоростей (область 3):

$$30 \leq \eta \leq 10^2 \div 10^3;$$

область закона следа (область 4) и область перемежаемости (область 5): $10^2 \div 10^3 \leq \eta$.

Первые три области (вязкий подслой, переходная область и область логарифмического профиля скоростей) обычно принято объединять в одну внутреннюю область, иногда также называемую областью закона стенки. Внутренняя область занимает в пограничном слое на плоской пластине примерно 20% от толщины всего слоя. В этой области, как об этом свидетельствуют измерения, вырабатывается (генерируется) около 80% энергии турбулентности. Характерными масштабами скорости и длины в этой области являются динамическая скорость v_* и динамическая длина λ/v_* . Сущность закона стенки проявляется прежде всего в том, что профили скорости во внутренней области, построенные в переменных закона стенки ($\psi = u/v_*$, $\eta = y v_*/\lambda$)

$$\psi = \psi(\eta), \quad (2.131)$$

оказываются малочувствительными к изменению внешних условий, т.е. к влиянию продольного перепада давления, турбулентности внешнего потока и других возмущений. Это выражается в том, что профили скоростей в форме (2.131), полученные для различных чисел Рейнольдса, различных благоприятных и неблагоприятных перепадов давления и т.д., будучи нанесенными на один график, "ложатся" практически на одну кривую.

Факт существования закона стенки во внутренней (пристеночной) области пограничного слоя обусловлен характерной для этой области мелкомасштабностью турбулентности (малыми размерами "вихрей"). Классические опыты Клаузера [33] по исследованию затухания возмущения, возникшего на различных расстояниях от стенки в турбулентном пограничном слое, показали, что внутренняя область обла-

дает "короткой памятью" [18], т.е. затухание возмущений происходит на "коротких" расстояниях (порядка нескольких толщин пограничного слоя). Почти полное отсутствие "памяти" у внутренней области и, как следствие этого, существование закона стенки можно отнести, по-видимому, к фундаментальным свойствам турбулентного пограничного слоя. Закон стенки очень широко использовался и продолжает использоваться при построении приближенных интегральных методов расчета; на его основе предложены эффективные численные методы интегрирования уравнений пограничного слоя [34].

Область закона следа и область перемежаемости (рис. 5) объединяют обычно в единую область, называемую внешней. Внешняя область по протяженности занимает в пограничном слое на пластине примерно 80% от толщины слоя; масштабом скорости здесь является скорость на внешней границе пограничного слоя, в качестве линейного масштаба можно принять толщину пограничного слоя. Профили скорости во внешней области напоминают по форме "струйные" профили; отсюда произошло название области закона следа.

Внешняя область с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает "долгой памятью" [18], т.е. для полного восстановления от возмущения требуются в общем случае расстояния, во много раз превышающие масштаб турбулентности, в качестве которого для грубых оценок можно принять толщину пограничного слоя. Это значит, что свойства течения во внешней области могут в большой степени зависеть от предистории течения и в меньшей степени от локальных характеристик потока. Релаксационные свойства внешней области, непосредственно связанные с эффектами "долгой памяти", чрезвычайно затрудняют описание процессов переноса в этой области. Современные представления о релаксационных свойствах турбулентного пограничного слоя пока еще не привели к созданию практически надежных и достаточно универсальных методов расчета существенно неравновесных слоев. Поэтому изучение структуры внешней части турбулентного пограничного слоя, ее релаксационных свойств остается одной из наиболее актуальных проблем теории турбулентных течений.

Отсутствие рациональных методов учета релаксационных свойств турбулентного пограничного слоя не является единственной причиной затруднений, возникающих при расчетах сильно неравновесных течений, т.е. течений, в которых велика роль предистории потока. Столь же мало исследованным до сих пор остается вопрос о характере изменения относительной толщины внутренней и внешней области в зависимости от внешних условий на стенке. Известно, и это уже отмечалось выше, что в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости, внутренняя область занимает около 20% толщины слоя, а внешняя - остальные 80%. Из опытов, однако, известно, что это соотношение между относительными протяженностями областей не сохраняется в течениях при больших продольных перепадах давления. Так, по мере приближения к точке отрыва относительная толщина внутренней области убывает. При этом претерпевают изменения и структура те-

чения в этой области: участок логарифмического профиля скорости сокращается и в точке отрыва полностью вырождается; одновременно появляется участок с распределением скоростей по "закону корня квадратного" ($u \sim y^{1/2}$) [186,187]. За точкой отрыва, если отрыв не является локальным, течение переходит в свободное струйное течение.

О характере событий в предотрывной области дает некоторое представление следующий приближенный анализ профиля скорости в пристенной (внутренней) области. Как следует из уравнения движения (второе уравнение (2.81)) в пристенной области (там где можно пренебречь конвективными членами) это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{dp}{dx}.$$

Интегрируя это уравнение от стенки до произвольного, но малого значения y , получим

$$\tau = \tau_w + \frac{dp}{dx} y.$$

Используя простейшую полуэмпирическую гипотезу турбулентности Прандтля пути смешения

$$\tau = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

где κ — эмпирическая постоянная (подробно гипотеза рассматривается в § 1.1), нетрудно показать, что в случае, когда $\tau_w \gg \frac{dp}{dx} y$ (плоская пластина, малые продольные перепады давления), подстановка в левую часть предыдущего равенства $\tau = \tau_w$ приводит после интегрирования к логарифмическому профилю скоростей

$$\varphi = A + B \lg \eta$$

(φ, η — переменные закона стенки).

В случае, когда $\tau_w \ll \frac{dp}{dx} y$ (большие положительные продольные перепады давления), подстановка $\tau = \frac{dp}{dx} y$ в левую часть формулы

Прандтля приводит к распределению скоростей по "закону корня квадратного"

$$u = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right)^{1/2} \frac{1}{\kappa} \sqrt{y} + c$$

(c — постоянная интегрирования).

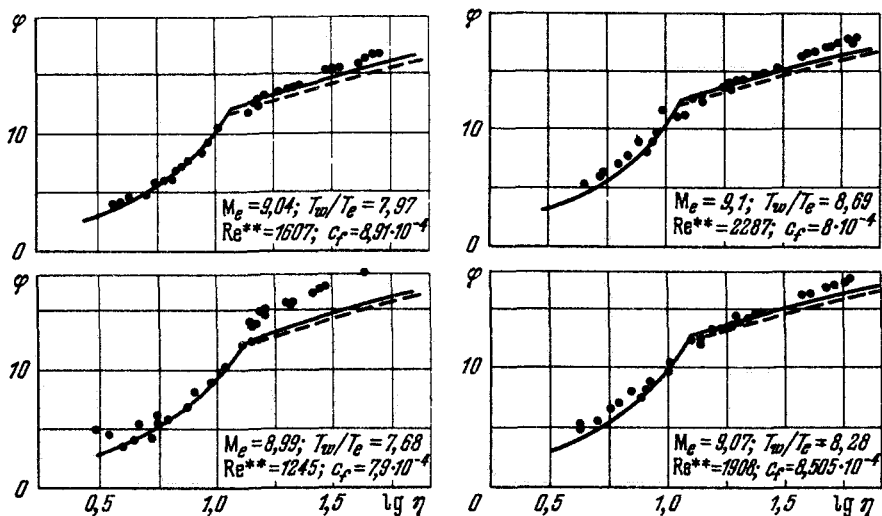


Рис. 6.

Очевидно, что при достаточно больших положительных перепадах давления возможны ситуации, когда во внутренней области реализуются оба приведенных выше профиля скоростей: логарифмический и профиль "половиной степеней". По мере приближения к точке отрыва участок логарифмического профиля, очевидно, должен сокращаться, поскольку $\tau_w \rightarrow 0$ в точке отрыва, и в точке отрыва исчезать полностью (вырождаться). Неясно, однако, каков характер изменения области закона "корня квадратного" по мере приближения к точке отрыва. Существующие опытные данные не дают вполне определенного ответа на этот вопрос. Это обстоятельство, как об этом еще будет сказано ниже, чрезвычайно затрудняет построение достаточно надежных методов расчета предотрывных течений и положения точки отрыва.

Отметим, что к подобным же результатам можно прийти на основе применения соображений размерности [186, 187] без использования полуэмпирической гипотезы Прандтля, однако это отличие в анализе не является принципиальным, поскольку формула Прандтля также получается из соображений размерности (см. § 11).

Как видно из приведенного сравнительно краткого описания свойств течения в различных областях турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости, еще многие "структурные" проблемы ожидают своего решения.

Анализ значительного числа измерений профилей скорости на пластине при различных значениях числа Маха ($0 < M_\infty < 9$) набегающего потока и температурного фактора, проведенный в монографии автора [35], показал, что в вязком подслое профиль скоростей удовлетворительно описывается линейной зависимостью $\psi = \eta$. В пристеночной

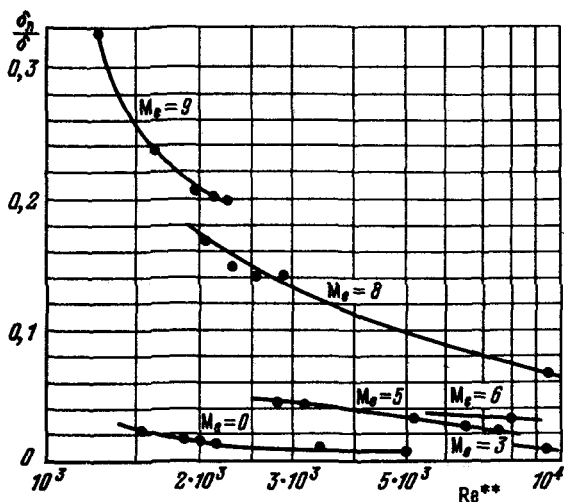


Рис. 7.

области профиль скоростей является логарифмическим. В случае теплоизолированной поверхности наклон логарифмического участка профиля оказывается таким же, как в несжимаемой жидкости. При наличии теплообмена наклон профиля скоростей в этой области оказывается несколько большим, чем в несжимаемой жидкости.

Сравнение профилей скорости при больших числах Маха (опытные точки на рис. 6 [36] и в несжимаемой жидкости (рис. 4) показывает, что при больших числах Маха переходная (буферная) область между вязким подслоем и турбулентным ядром существенно уменьшается. Если в несжимаемой жидкости переходная область начинается от $\eta = 5$ и кончается при $\eta = 30-50$, то при больших числах Маха (например, в опытах Хилла [36]) буферная область почти полностью вырождается и переход от вязкого подслоя к турбулентному ядру носит резкий характер (о штриховой и сплошной кривых на рис. 6 будет сказано ниже).

Другой важной особенностью профилей скорости в сверхзвуковых потоках является увеличение толщины вязкого подслоя с ростом числа Маха. О характере изменения относительной толщины вязкого подслоя с ростом числа Маха при различных числах Рейнольдса можно судить по рис. 7 (на этом рисунке приведены опытные данные Хилла [36], Лобба, Винклер и Перша [37], а также Е.У.Репика). Как видно из рисунка, в несжимаемой жидкости толщина вязкого подслоя δ_x не превышает 3% от толщины всего слоя δ . При $M_\infty = 9$ δ_x может занимать 30% и более от полной толщины слоя, причем скорость нарастания относительной толщины вязкого подслоя с ростом числа Маха увеличивается. Уменьшение числа Рейнольдса $Re^{**} = \delta^{**} U_\infty / \nu$ также приводит к увеличению δ_x / δ .

§ 11. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Незамкнутость системы уравнений переноса в осредненном турбулентном движении, обусловленная присутствием в этих уравнениях корреляционных членов, выражающихся через пульсационные характеристики движения, приводит к необходимости постулирования некоторых дополнительных соотношений, так или иначе связывающих входящие в уравнения параметры осредненного и пульсационного движения. Характерной чертой указанных дополнительных соотношений, получивших наименование гипотез турбулентности, является использование в большей или меньшей степени информации эмпирического характера, в связи с чем большинство гипотез турбулентности являются по форме и существу полуэмпирическими.

Целью настоящего параграфа не является составление сколь-нибудь полного обзора современных полуэмпирических гипотез турбулентности. С учетом специфических особенностей задач и проблем, которым посвящена настоящая книга, ниже будут рассмотрены главным образом лишь те из многочисленных гипотез турбулентности, которые нашли или могут найти широкое применение в исследованиях свойств турбулентных пограничных слоев в сверхзвуковых потоках газа. Читателю, интересующемуся рассматриваемой проблемой в более широком плане, можно рекомендовать уже цитированный обзор А.С. Гиневского, В.А. Иоселевича, А.В. Колесникова, Ю.В. Лапина, В.Н. Пилипенко, А.Н. Секундова [24], книгу Патанкара и Сполдинга [34], а также конспект лекций Лаундера и Сполдинга [39].

11.1. Формула Буссинеска. Вероятно, первая, основанная на чисто интуитивных соображениях попытка описания процесса переноса количества движения в турбулентном движении принадлежит Буссинеску (1877 г., [38]).

Используя возможность аналогии между процессами переноса в ламинарном и турбулентном движениях, Буссинеск по аналогии с формулой Ньютона предположил наличие линейной связи между турбулентным касательным напряжением и скоростью сдвига

$$\tau_t = A \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.132)$$

Здесь u — осредненная (в терминах Рейнольдса) скорость, A — турбулентный аналог динамической вязкости. Коэффициент A считался постоянной величиной, значение которой во много раз превышает динамическую вязкость.

Уместно отметить, что исследование Буссинеска было проведено задолго до появления в 1894 г. классической работы Осборна Рейнольдса [20], в которой был сформулирован подробно рассмотренный выше в § 6 новый подход к проблеме описания турбулентности: введены понятия осредненного и пульсационного движений, указаны правила осреднения, выписан тензор турбулентных напряжений.

Последующие исследования турбулентности в потоках со сдвигом показали, что идея "градиентного" описания процессов переноса количества движения в таких потоках, заключенная в формуле (2.132), получившей наименование формулы Буссинеска, является весьма плодотворной. В дальнейшем "градиентный" способ описания был обобщен на процессы переноса тепла, вещества и других физических субстанций.

Предположения Буссинеска о характере коэффициента турбулентной вязкости A оказались ошибочными. Этот коэффициент в турбулентном сдвиговом потоке не является постоянной величиной, а существенно зависит от осредненных характеристик потока в данной точке, а в ряде случаев и от характеристик турбулентности потока в целом. Отмеченное обстоятельство не позволяет отнести формулу Буссинеска к полуэмпирическим гипотезам турбулентности в современном понимании этого термина, поскольку коэффициент A остается фактически неопределенным и для его нахождения необходимы дополнительные предположения.

При оценке возможностей использования формулы Буссинеска (2.132) необходимо иметь в виду, что "градиентное" представление потоков количества движения, тепла, вещества и других физических субстанций, хотя и позволяет описать очень широкий класс сдвиговых течений, однако не является универсальным. Хорошо известно, что "градиентное" представление позволяет более или менее удовлетворительно описать процессы переноса в областях со значительной неоднородностью полей скорости, температур, концентраций, например в пристенной части турбулентного пограничного слоя, в пристенной части течения в канале. Однако в областях с небольшой неоднородностью полей, например во внешней части пограничного слоя (там, где $\partial u / \partial y \rightarrow 0$), на оси симметричного канала, "градиентное" описание процессов переноса может оказаться неэффективным. Особенно это замечание справедливо для так называемых неравновесных турбулентных пограничных слоев, в которых существенно влияние предистории потока, т.е. проявляются упоминавшиеся в предыдущем параграфе эффекты "долгой памяти" (релаксационные эффекты).

11.2. Гипотеза локальности механизма турбулентного переноса. Формула Прандтля. Формула Кармана. Сформулированный Буссинеском "градиентный" подход к описанию процессов турбулентного переноса неявно заключал в себе допущение о том, что механизм турбулентного переноса определяется в сдвиговом потоке локальными характеристиками потока, поскольку, согласно формуле Буссинеска, значение турбулентного напряжения в данной точке выражалось через скорость сдвига в той же точке (через значение $\partial u / \partial y$). Однако эта идея "локальности механизма турбулентного переноса" не получила в работе Буссинеска дальнейшего развития и не была использована для определения коэффициента турбулентной вязкости. Прошло почти пятьдесят лет, прежде чем в работе Прандтля [40] (1925 г.) идея "локальности" обрела современные четкие контуры и была весьма эффективно использована для определения коэффициента турбулентной вязкости.

Исследование Прандтля положило начало, по существу, всей современной полуэмпирической теории турбулентности и открыло новые необычайно широкие возможности для исследования свойств турбулентных течений; в этом, несомненно, выдающаяся заслуга Прандтля.

Большинство современных полуэмпирических гипотез турбулентности в большей или меньшей степени основываются на совокупности допущений, составляющих содержание гипотезы, получившей наименование "гипотезы локальности механизма турбулентного переноса" (Л.Г. Лойцянский [41]). Важнейшим из упомянутых допущений является допущение о том, что механизм турбулентного переноса количества движения полностью определяется заданием местных значений производных от осредненных скоростей по поперечной к направлению потока координате и физических свойств жидкости. Влияние процессов, происходящих вдали от рассматриваемой точки турбулентного потока, гипотезой локальности не учитывается.

Отметим, что сама местная скорость u в соответствии с принципом относительности Галилея влияние на процессы переноса оказывать не может.

Основываясь на гипотезе локальности и на соображениях размерности, можно получить формулу полуэмпирической теории Прандтля.

В теории Прандтля принимается, что местное изменение осредненной скорости определяется только первой производной скорости $\partial u / \partial y$, поэтому соображения размерности приводят к необходимости введения дополнительного понятия о длине "пути перемешивания", без которой составление формулы напряжения трения невозможно.

Используя соображения размерности можно установить, что единственно возможной комбинацией величин плотности жидкости ρ , "пути перемешивания" l и производной скорости $\partial u / \partial y$, выражающей напряжение трения τ_T , является

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (2.133)$$

Строгий вывод формулы Прандтля из соображений размерности приведен в учебном пособии Л.Г. Лойцянского [6].

Количественное выражение зависимости $\tau_T(y)$ следует определять из дополнительных соображений. Величине l не обязательно придавать смысл "пути перемешивания", как это первоначально было сделано Прандтлем. Более естественной представляется получившая в последнее время известное распространение трактовка l как масштаба турбулентности, т.е. как величины, характеризующей геометрическую структуру турбулентного потока или средний размер, участвующих в турбулентном переносе жидких объемов ("вихрей"). Важно подчеркнуть, что формула Прандтля (2.133), будучи "локальной по духу", вместе с тем оставляет некоторые возможности для учета интегральных свойств потока и его предыстории, благодаря неопределенности величины l .

На основе экспериментальных данных, полученных Никурадзе в гладких трубах [42], Прандтль предложил следующую эмпирическую формулу для величины ℓ :

$$\frac{\ell}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4. \quad (2.134)$$

Здесь R — радиус трубы.

Для небольших расстояний от стенки формула (2.134) приводит к зависимости

$$\ell = \kappa y \quad (2.135)$$

со значением постоянной κ , равной 0,4.

Зависимость (2.135) была использована Прандтлем в работе, относящейся к 1933 г. [43], для описания турбулентного течения вблизи безграничной стенки.

Последующие исследования показали, что зависимость (2.135) справедлива лишь во внутренней (пристеночной) области пограничного слоя, за исключением тонкого по сравнению с толщиной всего слоя в несжимаемой жидкости вязкого подслоя и буферной области (см. предыдущий параграф), непосредственно граничащих с твердой поверхностью.

Во внешней части пограничного слоя, а также в свободных турбулентных течениях, удовлетворительные результаты в некоторых случаях удалось получить на основе формулы Прандтля (2.133) с использованием допущения о постоянстве пути перемешивания ℓ по сечению струи (внешней области пограничного слоя)

$$\ell = \text{const.} \quad (2.136)$$

В пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости, характер изменения пути перемешивания поперек слоя показан на рис. 8. Как видно из рисунка, во внешней части пограничного слоя отношение ℓ к толщине слоя δ постоянно и примерно равно 0,09. Отметим также, что граница между внутренней областью, в которой справедлива зависимость (2.135), и внешней, где имеет место соотношение (2.136), определяется эмпирически. Безразмерное значение координаты точки y_m , в которой меняется характер зависимости $\ell(y)$, в соответствии с опытными данными для плоской пластины в несжимаемой жидкости составляет

$$y_m / \delta = 0,20 \div 0,22. \quad (2.137)$$

Приведенное на рис. 8 распределение пути перемешивания использовалось различными авторами для расчетов характеристик турбулентных пограничных слоев на пластине и при небольших продольных перепадах давления.

Различия между моделями различных авторов, подобными той, что приведена на рис. 8, обычно сводятся к различию постоянных, используемых в этих моделях. Приведем значения этих постоянных,

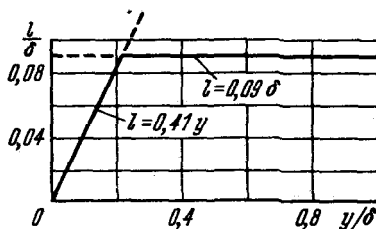


Рис. 8.

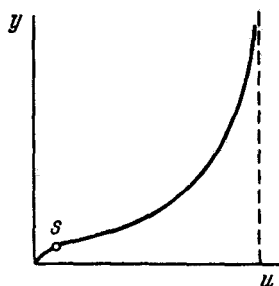


Рис. 9.

принятые в модели Эскудиера [44]

$$\begin{aligned} l/\delta &= \kappa(y/\delta) \quad \text{при} \quad y/\delta \leq \lambda/\kappa, \\ l/\delta &= \lambda \quad \text{при} \quad y/\delta \geq \lambda/\kappa, \\ \kappa &= 0,41, \quad \lambda = 0,09. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Применение рассматриваемой схемы к расчету существенно неравно-
весных пограничных слоев (например, находящихся в предотрывном
состоянии) во многих случаях не привело к хорошему согласованию
расчетных и опытных данных.

Принимая в рамках гипотезы локальности механизма турбулент-
ного переноса допущение о том, что локальные свойства потока
определяются первой и второй производными от осредненной скоро-
сти по поперечной координате (в гипотезе Прандтля учитывается
влияние только первой производной), нетрудно на основе соображе-
ний размерности прийти к заключению о существовании и единствен-
ности формулы напряжения трения

$$\tau_T = \rho \kappa^2 \frac{(\partial u / \partial y)^4}{(\partial^2 u / \partial y^2)^2}, \quad (2.139)$$

получившей наименование формулы Кармана. Сравнивая формулы
(2.139) и (2.133), найдем, что

$$l = -\kappa \frac{\partial u / \partial y}{\partial^2 u / \partial y^2} \quad (\kappa = 0,4). \quad (2.140)$$

Как видно из формулы Кармана, для определения напряжения трения
по этой формуле нет необходимости привлекать понятие о турбулент-
ном пути перемешивания. Это обстоятельство делает формулу Кар-
мана в некоторых случаях предпочтительней формулы Прандтля, на-
пример при расчете "безградиентных" течений несжимаемой и сжи-
маемой жидкости, т.е. течений, в которых "предыстория потока" не
играет существенной роли.

Однако при рассмотрении течений с градиентом давления роль
предыстории потока существенно возрастает. В этом случае формула

Прандтля, содержащая неопределенную величину ζ , оставляет больше возможностей для учета предыстории потока и поэтому является более предпочтительной по сравнению с формулой Кармана. Существенным недостатком формулы Кармана является также невозможность ее применения к расчету течений, в которых профили скоростей имеют точку перегиба (δ) (рис. 9). В этой точке вторая производная от скорости по поперечной координате обращается в нуль ($\partial^2 u / \partial y^2 = 0$), что в соответствии с формулой (2.139) приводит к бесконечно большому напряжению трения в пограничном слое. В связи с этим формула Кармана не получила применения в теории свободных турбулентных течений, для которых характерна δ - образность профиля скоростей; по этой же причине нельзя надеяться на успех применения этой формулы при расчете предотрывных турбулентных пограничных слоев.

11.3. Взаимодействие процессов молекулярного и турбулентного переноса вблизи твердой поверхности (эффективная вязкость). Модификация формулы Прандтля, предложенная Ван-Дристом. Гипотеза Лойцянского. Гипотеза Совершенного. Применение формулы Прандтля (2.133) с использованием зависимости пути перемешивания в форме (2.135) приводит к необходимости введения дискретных расчетных схем, например двухслойной прандтлевской схемы. Принципиальным недостатком схем подобного рода является неучет взаимодействия существенно отличающихся друг от друга процессов переноса, протекающих в непосредственной близости от стенки (молекулярные процессы) и в области развитого турбулентного движения (молярные процессы).

Неучет этого взаимодействия, вообще говоря, не приводит к существенным погрешностям при расчете сопротивления тел простейшей формы, что, как отмечалось в предыдущем параграфе, обеспечило жизнеспособность простой двухслойной прандтлевской схемы в течение длительного периода. Тем не менее потребность в достаточно аккуратном описании взаимодействия процессов молярного (турбулентного) и молекулярного переноса, в особенности стимулировавшаяся исследованиями тепло- и массообмена в средах с большими числами Прандтля и Шмидта, все более становилась очевидной. Немаловажную роль в создании "непрерывных" моделей турбулентности, так или иначе учитывающих указанное взаимодействие, сыграло широкое применение ЭВМ в расчетах турбулентных течений.

Модели взаимодействия процессов турбулентного и молекулярного переноса были предложены различными авторами, некоторые из этих моделей будут рассмотрены ниже, однако наибольшую известность и широкое применение получила модель, предложенная в 1956 г. Ван-Дристом [45].

В основу модели положено допущение об аналогии между движением вязкой жидкости вблизи колеблющейся параллельно самой себе плоской безграничной пластины (вторая задача Стокса [46]) и турбулентным движением в окрестности стенки.

В предположении о "слоистости" течения уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости вблизи колеблющейся параллельно самой себе пластины сводится к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.141)$$

Здесь t — время, y — координата, отсчитываемая по нормали к пластине, u — проекция скорости на ось x , направленную вдоль пластины, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Если принять, что скорость стенки меняется по закону

$$u(0, t) = u_0 \cos nt, \quad (2.142)$$

то при использовании очевидного граничного условия

$$u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (2.143)$$

решение уравнения (2.141) имеет следующий вид:

$$u(y, t) = u_0 e^{-ky} \cos(nt - ky), \quad (2.144)$$

где $k = \sqrt{\frac{n}{2\nu}}$.

Результаты расчетов профилей скорости по соотношению (2.144) в различные моменты времени приведены в книге Шлихтинга [46].

Из уравнения (2.144) следует, что амплитуда скорости движения уменьшается при увеличении расстояния от стенки по экспоненциальному закону e^{-ky} . Если предположить, что турбулентные пульсации скоростей затухают вследствие влияния вязкости по мере приближения к стенке по тому же экспоненциальному закону (в этом случае стенка неподвижна, а жидкость совершает колебания), то для пульсации скорости можно написать выражение

$$u' = u'_0 (1 - e^{-ky}). \quad (2.145)$$

Аналогично для поперечной составляющей имеем

$$v' = v'_0 (1 - e^{-ky}). \quad (2.146)$$

Используя равенства (2.145) и (2.146) и выражение для турбулентного трения, получим

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = -\rho \overline{u'_0 v'_0} (1 - e^{-ky})^2. \quad (2.147)$$

В соответствии с гипотезой Прандтля (2.133) в развитом турбулентном движении

$$-\overline{u'_0 v'_0} = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (2.148)$$

После подстановки равенства (2.148) в выражение (2.147) будем иметь

$$\tau_T = \rho l^2 (1 - e^{-ky})^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (2.149)$$

Рассмотрим показатель экспоненты, входящей в правую часть соотношения (2.149)

$$ky = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \quad y = \frac{y \sqrt{\pi\gamma/2}}{\gamma}. \quad (2.150)$$

Множитель $\sqrt{\pi\gamma/2}$, как нетрудно видеть, имеет размерность скорости. В области действия закона стенки единственной характерной скоростью является динамическая скорость $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, следо-

вательно, можно заключить, что между v_* и $\sqrt{\pi\gamma/2}$ должна существовать зависимость

$$v_* = A \sqrt{\pi\gamma/2}, \quad (2.151)$$

где A — эмпирическая постоянная, определяемая из опыта.

Используя (2.151), приведем выражение для турбулентного напряжения (2.149) к виду

$$\tau_T = \rho l^2 \left(1 - e^{-\frac{y v_*}{A \gamma}} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (2.152)$$

Записывая соотношение (2.152) в переменных закона стенки ($\varphi = u/v_*$, $\eta = y v_*/\gamma$) и учитывая равенство (2.135), будем иметь

$$\tau_T = \kappa^2 \eta^2 \tau_w \left(1 - e^{-\frac{\eta}{A}} \right)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2. \quad (2.153)$$

Полное напряжение трения равно сумме

$$\tau_\Sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_T. \quad (2.154)$$

Приняв допущение о постоянстве τ_Σ вблизи стенки $\tau_\Sigma = \text{const} = \tau_w$, приведем соотношение (2.154) к виду

$$\kappa^2 \eta^2 \left(1 - e^{-\eta/A} \right)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 + \frac{d\varphi}{d\eta} - 1 = 0. \quad (2.155)$$

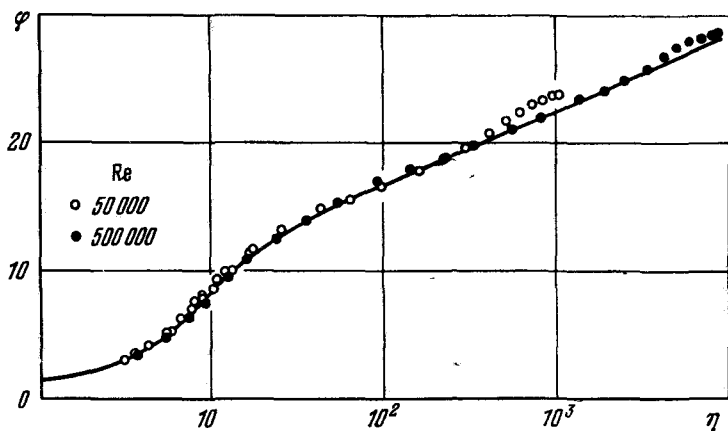


Рис. 10.

Разрешая уравнение (2.155) относительно величины $d\psi/d\eta$ и производя затем формальное интегрирование, получим следующее выражение для профиля скоростей в пристеночной области (области закона стенки)

$$\psi = \int_0^{\eta} \frac{2 d\eta}{1 + \sqrt{1 + 4 \kappa^2 \eta^2} [1 - \exp(-\eta/A)]^2}. \quad (2.156)$$

Из сопоставления расчетов по формуле (2.156) с опытными данными Лауфера в цилиндрической трубе Ван-Дрист нашел постоянную $A = 26$, рис. 10.

Если воспользоваться понятием эффективной вязкости

$$\tau_{эфф} = \tau_T + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_{эфф} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.157)$$

то в соответствии с модификацией формулы Прандтля, предложенной Ван-Дристом, следует

$$\mu_{эфф} = \mu + \rho \kappa^2 y^2 \left(1 - e^{-\frac{y v_*}{2A}}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.158)$$

Следует подчеркнуть, что понятие эффективной вязкости в качестве основного составного элемента включает в той или иной форме учет взаимодействия между турбулентными и молекулярными процессами переноса; было бы неверно вводить эффективную вязкость как результат простой суперпозиции (сложения) молекулярной и турбулентной вязкостей. Отметим, что экспоненциальный множитель, входящий в выражение эффективной вязкости, иногда называют демпфирующим множителем Ван-Дриста.

Модификация гипотезы пути смешения (2.158) приводит, как нетрудно видеть, к закону "четвертой степени" для изменения коэффициента турбулентной вязкости в окрестности стенки, что хорошо согласуется с многочисленными опытными данными по тепло- и массообмену при больших числах Прандтля и Шмидта [6].

Действительно, разлагая экспоненту в выражении (2.158) в ряд при малых значениях показателя $\eta/A = \eta v_* / (\nu A)$, найдем с учетом линейности профиля скоростей в окрестности стенки ($\psi = \eta$), что по мере приближения к стенке

$$\mu_{эфф} = \mu (1 + \kappa^2 \eta^4 / A). \quad (2.159)$$

Сравнивая формулу (2.159) с эмпирической формулой Дайслера [47]

$$\mu_T / \mu = \gamma \kappa^4 \eta^4 \quad (\gamma = 0,092, \kappa = 0,4), \quad (2.160)$$

нетрудно заметить, что постоянная A в демпфирующем множителе Ван-Дриста выражается через постоянные γ и κ зависимостью

$$A = \frac{1}{\sqrt{\gamma} \kappa}. \quad (2.161)$$

При указанных выше значениях констант γ и κ это приводит к значению $A = 26$.

Гипотеза Лойцянского. В работе Л.Г. Лойцянского [48], опубликованной в 1960 г., на основе иных, чем в работе Ван-Дриста, соображений получено следующее выражение для эффективной вязкости:

$$\mu_{эфф} = \mu + \rho \kappa^2 \eta^2 (1 - e^{-\gamma \kappa^2 \eta^2}) \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.162)$$

Соотношение (2.162) составлено таким образом, что при малых значениях η оно непосредственно переходит в эмпирическую формулу Дайслера (2.160). Как следует из выражения (2.162), путь перемешивания l имеет вид

$$l = \kappa \eta (1 - e^{-\gamma \kappa^2 \eta^2})^{1/2}. \quad (2.163)$$

Гипотеза Совершенного [49]. В соответствии с рассматриваемой гипотезой эффективная вязкость представляется в форме соотношения

$$\begin{aligned} \mu_{эфф} &= k_1 \mu + k_2 \mu_T, \\ k_1 &= \left[1 + \kappa^2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right]^{-1}, \quad k_2 = \kappa^2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \left[1 + \kappa^2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \kappa &= 0,4, \quad \eta_* = 11,6. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Если для турбулентной вязкости μ_T принять классическую формулу Прандтля

$$\mu_T = \rho x^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.165)$$

то вблизи стенки модель (2.164) также приводит к закону четвертой степени (2.160).

В выражение эффективной вязкости (2.164) входит параметр η_* , характеризующий толщину вязкого подслоя (так называемое локальное критическое число Рейнольдса). От выбора этого параметра существенно зависят результаты расчетов. В работах [50, 51] была получена зависимость величины η_* от параметров вдува, продольного перепада давления, числа Маха и местного числа Рейнольдса, построенного на толщине потери импульса.

11.4. Некоторые модификации гипотезы Прандтля – Ван-Дриста. Разными авторами были предложены модификации гипотезы Прандтля – Ван-Дриста. Эти модификации выражались, как правило, в замене постоянной $A = 26$ в выражении для эффективной вязкости (2.158) некоторой функцией. Ниже приводятся некоторые модели рассматриваемого типа.

Гипотеза Патанкара – Сполдинга [34] (1967). Согласно этой гипотезе постоянная A в выражении (2.158) заменялась функцией

$$A = 25,3 \left(\frac{\tau}{\tau_w} \right)^{-1/2}. \quad (2.166)$$

Кроме несущественного изменения постоянного множителя, в гипотезе Патанкара – Сполдинга, в отличие от гипотезы Прандтля – Ван-Дриста вместо трения на стенке τ_w в показателе экспоненты фигурирует локальное трение τ , что по мнению авторов гипотезы, позволяет уточнить расчет турбулентной вязкости за пределами той области, где $\tau_\tau = \text{const} = \tau_w$. Гипотеза применялась для расчета

течения несжимаемой жидкости и газа.

Гипотеза Лаундера – Джонса [54] (1969). В соответствии с рассматриваемой гипотезой постоянная A в формуле Прандтля – Ван-Дриста (2.158) была заменена функцией

$$A = 25,3 \left(\frac{\tau}{\tau_w} \right)^{-1}, \quad (2.167)$$

которая отличается от аналогичной функции в гипотезе Патанкара – Сполдинга (2.166) множителем $(\tau/\tau_w)^{-1/2}$. С помощью введения этого множителя авторам гипотезы удалось улучшить согласование расчетов с экспериментом в тех случаях, которые они исследовали [54].

Гипотеза Себеси, Смита, Мосинскиса [53] (1970). Эта гипотеза в известной степени аналогична гипотезе Патанкара – Сполдинга с тем, однако, отличием, что текущее значение напряжения трения, входящее в демпфирующий множитель, здесь конкретизируется с помощью выражения для касательного напряжения, справедливого в непосредственной близости от стенки

$$\tau = \tau_w + \frac{dp}{dx} \frac{y}{\tau_w}.$$

В результате для функции A получается следующее выражение:

$$A = 26 \left(1 + \frac{dp}{dx} \frac{y}{\tau_w} \right)^{-1/2}. \quad (2.168)$$

Все три рассмотренные модификации формулы Прандтля – Ван-Дриста в большей или меньшей степени отдают приоритет локальному напряжению трения перед трением на стенке при учете взаимодействия процессов молекулярного и турбулентного переноса.

Гипотеза Себеси [52] (1970). Эта гипотеза была сформулирована применительно к течениям несжимаемой жидкости, однако ее нетрудно обобщить на течения сжимаемого газа, приняв те или иные допущения о характере изменения толщины вязкого подслоя и свойств газа в пристеночной области. Отличие рассматриваемой гипотезы от гипотезы Прандтля – Ван-Дриста заключается в принятии допущения о том, что характерной скоростью в показателе демпфирующего множителя является не динамическая скорость на стенке $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, а ско-

рость на границе вязкого подслоя $v_{*n} = (\tau_n/\rho)^{1/2}$. На основе этого допущения и упрощенного уравнения движения в подслое

$$\frac{d\tau}{dy} - \frac{v_w}{y} \tau = \frac{dp}{dx},$$

нетрудно получить

$$A = 26 \left\{ -\frac{p_*}{v_{w*}} [\exp(11,8 v_{w*} - 1)] + \exp(11,8 v_{w*}) \right\}^{-1/2},$$

$$p_* = -\frac{dp}{dx} \frac{y}{\rho v_*^3}, \quad v_{w*} = \frac{v_w}{v_*}. \quad (2.169)$$

Для непроницаемой стенки ($v_{w*} = 0$) из соотношения (2.169) следует

$$A = 26 [1 - 11,8 p_*]^{-1/2}. \quad (2.170)$$

Для проницаемой пластины ($p_* = 0$) имеем

$$A = 26 \exp(-5,9 v_{w*}). \quad (2.171)$$

Гипотеза Себеси - Смита [23] (1974). Эта гипотеза, по существу, является одним из возможных обобщений предыдущей гипотезы на течение сжимаемого газа. Для течения без массообмена на поверхности ($v_w = 0$) в соответствии с гипотезой Себеси - Смита

$$A = 26 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} \left[1 - 11,8 \left(\frac{\mu_w}{\mu_e} \right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 \frac{\mu_e U_e}{\rho_e v_*^3} \frac{dU_e}{dx} \right]^{-1/2}. \quad (2.172)$$

Соотношение (2.172) совместно с формулой Прандтля - Ван-Дриста (2.158) широко применялось его авторами при численном исследовании характеристик турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе [23, 55].

Наряду с рассмотренными гипотезами многими авторами были предложены и другие модификации гипотезы Прандтля - Ван-Дриста. Укажем, в частности, на работы Плетчера [56], Кейса и др. [57].

Подчеркнем, что все приведенные выше модификации формулы Прандтля - Ван-Дриста сформулированы применительно к пристеночной (внутренней) области турбулентного пограничного слоя, т.е. к области закона стенки.

11.5. Гипотезы турбулентности для внешней области турбулентного пограничного слоя. Длительное время для определения турбулентной вязкости во внешней области пограничного слоя широко использовалась формула Прандтля

$$\mu_T = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.173)$$

в которой путь перемешивания l предполагался постоянным по сечению слоя, пропорциональным толщине слоя, так, например, как в модели Эскудиера (2.138). В последние годы предпочтение часто отдается гипотезе Клаузера [33]. Согласно этой гипотезе турбулентная кинематическая вязкость во внешней области принимается постоянной, пропорциональной характерному размеру пограничного

слоя δ_i^* (δ_i^* - толщина вытеснения) и среднему значению дефекта

скорости $(1/\delta_i^*) \int_0^\infty (U_e - u) dy$, т.е.

$$\mu_T = \rho k \delta_i^* \frac{\int_0^\infty (U_e - u) dy}{\delta_i^*} = \rho k U_e \delta_i^*, \quad (2.174)$$

где

$$\delta_i^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy.$$

Коэффициент пропорциональности k в выражении (2.174) определяется эмпирически. По данным различных авторов $k = 0,0160-0,0180$; чаще других используется значение $k = 0,0168$.

Для учета процессов перемежаемости вблизи границы пограничного слоя нередко в выражение (2.174) вводят определенный Клебановым [18] путем измерений эмпирический коэффициент перемежаемости

$$\mu_{\tau} = \rho k U_e \delta_i^* \gamma, \quad (2.175)$$

где

$$\gamma = \left[1 + 5,5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}. \quad (2.176)$$

В форме (2.175) гипотеза Клаузера применяется при расчетах турбулентных пограничных слоев в сжимаемом газе, причем δ_i^* вычисляется так же, как в несжимаемой жидкости, т.е. без учета переменности плотности поперек слоя (чтобы подчеркнуть это обстоятельство, величине δ_i^* присвоен индекс i).

Следует отметить, что допущение о постоянстве пути перемешивания в формуле Прандтля (2.173) и коэффициента турбулентной вязкости в формуле Клаузера в известной степени противоречат друг другу. Однако опыт расчетов турбулентных пограничных слоев показал, что при соответствующем выборе эмпирических констант во многих случаях формулы Прандтля и Клаузера приводят к близким результатам.

Для оценки возможностей применения гипотезы Клаузера необходимо иметь в виду, что она была сформулирована на основе широких экспериментальных исследований свойств так называемых равновесных турбулентных пограничных слоев. В качестве критерия равновесности, введенного Клаузером, используется обычно условие постоянства параметра β

$$\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dp}{dx} = \text{const.} \quad (2.177)$$

Опыт применения формулы Клаузера для описания равновесных или близких к равновесным турбулентных пограничных слоев оказался весьма положительным, однако попытки использования этой формулы в расчетах существенно неравновесных течений нередко приводили к неудовлетворительному согласованию расчетных и опытных данных. Это обстоятельство обусловило появление некоторых модификаций формулы Клаузера.

В работе Куена и Нильсена [58] коэффициент пропорциональности k в формуле Клаузера (2.175) было предложено рассматривать как функцию параметра равновесности β (2.177)

$$k = 0,0130 + 0,0038 \exp(-\beta/15). \quad (2.178)$$

В предельных случаях получается

$$k = 0,0168 \text{ при } \beta = 0$$

$$k = 0,0130 \text{ при } \beta \rightarrow \infty.$$

В работе Ривза [59] была предпринята попытка модифицировать формулу Клаузера таким образом, чтобы на внешней границе пограничного слоя турбулентная вязкость стремилась к нулю. С этой целью в формулу Клаузера был введен дополнительный множитель

$$\mu_T = \rho k U_e \delta^* (1 - \eta^\omega), \quad (2.179)$$

где

$$\eta = \frac{1}{\delta} \int_{y_m}^y \frac{u_e}{u_0} \frac{\rho_e}{\rho_0} dy,$$

δ — толщина слоя; u , ρ — скорость звука и плотность соответственно; индексами e и 0 обозначены параметры на границе слоя и параметры торможения. Для показателя степени ω было принято значение $\omega = 3$.

Некоторыми исследователями отмечалась неуниверсальность постоянной k в формуле Клаузера при не слишком больших числах Рейнольдса; были предложены эмпирические зависимости этой величины от числа Рейнольдса [60], однако и эти зависимости, естественно, не могут быть распространены без должной проверки на условия течения, существенно отличающиеся от тех, в которых были получены эти эмпирические соотношения, тем более, если необходимо учесть влияние таких факторов, как сжимаемость, тепло- и массообмен и т.д.

Приведенные факты, а также накопленный к настоящему времени довольно обширный опыт по применению формулы Клаузера и ее модификаций к расчету существенно неравновесных турбулентных течений в пограничном слое свидетельствует о серьезных трудностях, еще не преодоленных современной полуэмпирической теорией турбулентности в исследовании существенно неравновесных течений. Более подробно о характере этих трудностей будет сказано в п. 11.7.

1.1.6. О полуэмпирических гипотезах турбулентности, используемых для замыкания уравнения кинетической энергии турбулентности и уравнений для вторых моментов. В основе полуэмпирической теории Прандтля и ее многочисленных модификаций, часть которых была рассмотрена выше, лежит гипотеза локальности механизма турбулентного переноса, согласно которой принимается, что турбулентные напряжения зависят только от локальной структуры осредненного течения. Эта гипотеза оказалась весьма эффективной для описания равновесных течений, однако в случае неравновесных течений, т.е. течений, в которых структура осредненного течения не

"соответствует" внутренней структуре турбулентности, применение гипотезы локальности оказывается тем менее оправданным, чем больше степень этого "несоответствия". Это обстоятельство наводит на "естественную" мысль о необходимости установления связей между компонентами тензора турбулентных напряжений и локальными параметрами турбулентности, поскольку можно ожидать, что равновесие внутренней структуры турбулентности устанавливается быстрее, чем равновесие между турбулентностью и осредненным течением.

Приведенные соображения стали исходной предпосылкой для разработки полуэмпирических теорий турбулентности в несжимаемой жидкости на основе использования уравнения кинетической энергии турбулентности и уравнений для рейнольдсовых напряжений (вывод этих уравнений приводится в п. 7.7 § 7). Из рассмотрения этих уравнений ((2.63) и (2.67)) следует, что они не могут быть непосредственно использованы, поскольку содержат ряд неизвестных членов. Для замыкания этих уравнений необходимо, как обычно в полуэмпирической теории турбулентности, выразить неизвестные члены через некоторый набор определяющих параметров, так, чтобы число уравнений соответствовало числу этих параметров. Возможности для более или менее обоснованного установления таких связей оказались чрезвычайно многообразны, что привело в конечном счете к разработке очень большого числа теорий подобного рода.

Фундаментальную роль в теории турбулентности, основанной на использовании уравнения кинетической энергии турбулентности в несжимаемой жидкости, сыграли работы А.Н. Колмогорова [61] и Прандтля, Вигхардта [62], в которых было предложено соотношение, связывающее кинематический аналог турбулентной вязкости

$\nu_T = \bar{\mu}_T / \rho$ и кинетическую энергию турбулентности $E_T = \rho \overline{v_k'' v_k''} / 2$,

$$\nu_T = c \sqrt{E_T / \rho} L. \quad (2.180)$$

Здесь L — интегральный масштаб турбулентности, c — эмпирическая постоянная. Нетрудно видеть, что соотношение (2.180) может быть получено при некоторых допущениях на основе соображений размерности.

Обратимся вновь к уравнению переноса кинетической энергии турбулентности в форме (2.67). Оценки, проведенные, в частности, в монографии В.М. Иевлева [25] показали, что второй член в правой части, т.е. $\rho \partial v_k'' / \partial s_k$, может стать существенным только при очень больших сверхзвуковых скоростях, когда пульсационная скорость по порядку величины близка к скорости звука. В несжимаемой жидкости и умеренных сверхзвуковых скоростях указанным членом, таким образом, можно пренебречь. Анализ и оценки третьего, так называемого диссипативного, члена в правой части уравнения (2.67) [25], показывают, что этот член можно представить в форме

$$\tau'_{jk} \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} = \bar{\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j''}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} \right)^2. \quad (2.181)$$

Имея в виду отмеченные обстоятельства и несколько преобразуя третий член в квадратных скобках в (2.67), приведем его уравнение к виду

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{v}_j E_T) = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[-\overline{v_j'' E_T''} - \overline{v_k'' p} + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{E_T}{\rho} \right) \right] - \bar{\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j''}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} \right)^2 - \overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j}. \quad (2.182)$$

Здесь для удобства введено обозначение

$$E_T'' = \frac{1}{2} \rho v_k'' v_k''. \quad (2.183)$$

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности в форме (2.182) являлось и до сих пор остается исходным во многих исследованиях турбулентных течений.

В упомянутой выше основополагающей работе А.Н. Колмогорова [61] была принята гипотеза о градиентном механизме турбулентной диффузии. Применительно к течениям несжимаемой жидкости диффузионные члены в уравнении (2.182) были представлены в виде

$$-\overline{v_j'' E_T''} - \overline{v_k'' p} = c_1 \rho_T \frac{\partial E_T}{\partial s_j}. \quad (2.184)$$

Здесь c_1 — эмпирическая постоянная.

Используя гипотезу (2.180) о связи кинематического коэффициента турбулентной вязкости и кинетической энергии турбулентности, можно диффузионные члены преобразовать к следующему виду:

$$-\overline{v_j'' E_T''} - \overline{v_k'' p} = c_1 \epsilon L \sqrt{\frac{E_T}{\rho}} \frac{\partial E_T}{\partial s_j}. \quad (2.185)$$

Для диссипативного члена в уравнении (2.182) А.Н. Колмогоров предложил простое аппроксимационное выражение

$$\bar{\mu} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_j''}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} \right)^2 = c_2 \frac{E_T}{L} \sqrt{\frac{E_T}{\rho}}. \quad (2.186)$$

Здесь c_2 — эмпирическая постоянная.

Последний член в правой части уравнения (2.182), описывающий возникновение (исчезновение) кинетической энергии турбулентности за счет работы рейнольдсовых напряжений в осредненном потоке

со сдвигом, с учетом гипотезы Буссинеска и формулы (2.180), выражается через кинетическую энергию и интегральный масштаб турбулентности L в виде

$$-\overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = \rho \nu_T \left(\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} \right)^2 = \rho c \sqrt{\frac{E_T}{\rho}} L \left(\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} \right)^2. \quad (2.187)$$

Подставив теперь выражения (2.185)–(2.187) в правую часть уравнения (2.182), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tilde{v}_j E_T) &= \frac{\partial}{\partial s_j} \left[\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{E_T}{\rho} \right) + c_1 c_L \sqrt{\frac{E_T}{\rho}} \frac{\partial E_T}{\partial s_j} \right] - \\ &- c_2 \frac{E_T}{L} \sqrt{\frac{E_T}{\rho}} + \rho c L \sqrt{\frac{E_T}{\rho}} \left(\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Уравнение (2.188) совместно с уравнениями Рейнольдса может быть использовано для решения конкретных задач при условии, что так или иначе задан (определен) интегральный масштаб турбулентности L .

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности в форме (2.188) или некоторые его модификации лежат в основе многих современных полуэмпирических гипотез турбулентности.

Уместно отметить, что принятое в уравнении (2.188) описание диссипации кинетической энергии турбулентности, т.е. описание превращения этой энергии в тепло благодаря действию молекулярной вязкости, справедливо лишь при больших числах Рейнольдса. В этом случае процессом, определяющим скорость диссипации, будет не сам процесс собственно диссипации, т.е. процесс превращения кинетической энергии "мелкомасштабных вихрей" в тепло, а процесс переноса энергии последовательно от "больших вихрей" к "меньшим". Этот каскадный процесс, как можно предполагать, зависит лишь от величин ρ , L , E_T и не зависит от вязкости. При указанных предположениях соображения размерности приводят к аппроксимации (2.186).

Для использования уравнения (2.188) или ему подобных уравнений необходимо задание интегрального масштаба турбулентности. В наиболее простых моделях для определения этого масштаба использовалось допущение об адекватности этого масштаба пути смешения, определяемого по формулам типа формулы Прандтля. Впервые такая модель не без успеха была применена к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в работе Г.С. Глушко [63]. Дальнейшее развитие модели подобного рода получили в работах Н.И. Акатнова, А.П. Кузнецова [64], Н.И. Акатнова, В.Ф. Тульверта [65] и др.

В более сложных моделях вместо "алгебраических" выражений для масштаба турбулентности используются дифференциальные урав-

нения для определения этой величины (двухпараметрические модели: Ротта [66], Г.С.Глушко [67, 68] и др.).

В работах Коважного [69], Ни и Коважного [70], А.Н.Секундова [71] вместо соотношений для интегрального масштаба турбулентности было предложено использовать уравнения для турбулентной вязкости, выведенные из тех или иных соображений.

В двухпараметрических моделях другого типа вместо уравнения для масштаба турбулентности используется дифференциальное уравнение для диссипативной функции, входящей в уравнение кинетической энергии турбулентности, полученное из феноменологических соображений (Лаундер, Сполдинг [39], Б.И.Давыдов [72, 73], Джонс, Лаундер [74], Хан'ялич, Лаундер [75]).

В ряде работ, преимущественно в работах Брэдшоу и его сотрудников [76, 77] была предложена полуэмпирическая модель, основанная на использовании уравнения для турбулентного трения. Эта модель, первоначально сформулированная для течений несжимаемой жидкости, была обобщена на течения сжимаемого газа в работе Брэдшоу [78].

Существуют и более сложные модели турбулентности, использующие одновременно несколько из упомянутых выше уравнений (уравнения кинетической энергии турбулентности, уравнения для турбулентного трения и уравнения для масштаба турбулентности (или диссипации)), однако большинство этих моделей из-за их сложности не получило широкого распространения даже для расчета течений несжимаемой жидкости. Подробную библиографию по указанным моделям можно найти в уже цитированном обзоре [24], а также в работах [93, 94].

В заключение отметим, что практически все модели турбулентности, так или иначе основывающиеся на использовании уравнения кинетической энергии турбулентности, уравнений для компонент тензора турбулентных напряжений (турбулентной вязкости) в сочетании с феноменологически составленными уравнениями для масштаба турбулентности, диссипации или других параметров, по необходимости включают эмпирическую информацию, полученную, как правило, из сопоставления результатов расчетов с опытными данными в условиях течения несжимаемой жидкости. Число эмпирических постоянных, входящих существенной составной частью в эти модели, нередко достигает десяти, в отличие от двух-трех эмпирических постоянных, используемых в классических моделях. Естественно, что попытки применения более сложных моделей для расчета течений с учетом сжимаемости среды, теплообмена, химических реакций и других возмущающих факторов требуют установления большей или меньшей универсальности всех эмпирических постоянных. Отсутствие достаточных опытных данных при наличии указанных возмущающих факторов делает эту задачу в настоящее время в большинстве случаев практически неразрешимой. Тем не менее уже накопленный опыт применения сложных моделей к расчету течений сжимаемого газа с теплообменом вселяет определенные надежды на возможности успешного обобщения некоторых из этих моделей на указанные условия [79, 80].

11.7. Некоторые проблемы полуэмпирической теории турбулентности. Необходимо с самого начала оговориться, что в этом разделе речь пойдет о проблемах так называемых "алгебраических" моделей турбулентности, т.е., по существу, полуэмпирических гипотез турбулентности Прандтля и Клаузера и их модификаций. Использование этих моделей, часть которых была рассмотрена в настоящем параграфе, к расчету равновесных (в смысле Клаузера) и околоравновесных течений привело в целом к удовлетворительным результатам. Об этом, в частности, свидетельствуют материалы и выводы Стэнфордской конференции [81].

Однако попытки рассчитать "сильно неравновесные" течения с использованием тех же гипотез турбулентности во многих случаях оказались неудачными. Об этом свидетельствуют, в частности, работы [82-84].

В работе [82] были проведены расчеты величин $\nu_T / (U_e \delta_v^*)$ и $l(\eta)$ (ν_T - кинематический аналог турбулентной вязкости, U_e - скорость на внешней границе пограничного слоя, δ_v^* - толщина вытеснения, l - турбулентный путь перемешивания) с использованием опытных данных по профилям скорости и температуры при положительных перепадах давления во внешнем потоке и числе Маха $M_\infty = 3,5$. При этом был использован так называемый обратный метод, заключающийся в нахождении турбулентной вязкости из уравнений пограничного слоя при заданных из опытов профилях скорости и температуры. Результаты расчетов для трех сечений пограничного слоя приведены на рис. 11. Основные результаты исследования заключаются в том, что отношение l/η в пристеночной области оказалось близким к значению 0,65 вместо общепринятого 0,4; максимальные значения величины $\nu_T / U_e \delta_v^*$ во внешней области в зависимости от продольного перепада давления возрастали от 0,025 до 0,06 вместо обычного значения 0,0168. Не преувеличивая возможностей обратного метода, поскольку в этом методе по необходимости используется не слишком точная операция численного дифференцирования, нельзя не отметить весьма существенного различия между общепринятыми и полученными значениями рассмотренных величин.

Подобные же "несогласования" некоторых из указанных параметров с опытными данными отмечены в работах [83, 84]. На рис. 12 приведены распределения тех же, что и на рис. 11, параметров в сечениях пограничного слоя, полученные в опытах Ли - Смита [83] в плоском сверхзвуковом сопле при $M_\infty = 5$ и различных распределениях давления p вдоль координаты x . Там же приведены данные из работы Мейза и Макдональда [85]. Видно, что различие между опытными данными Ли - Смита, также полученными "обратным методом", и гипотезой Мейза - Макдональда, являющейся одной из модификаций гипотезы пути смешения, достигает 200%.

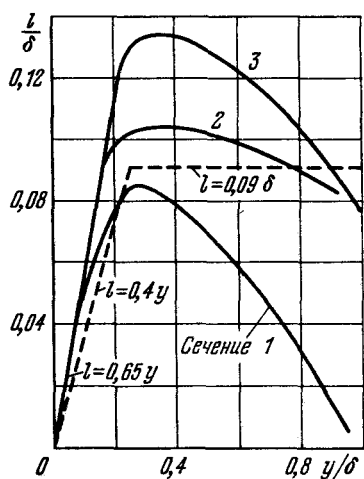
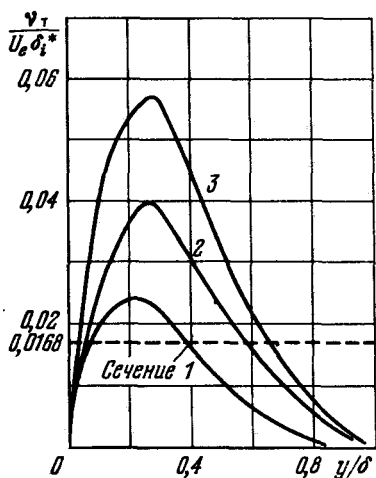


Рис. 11.

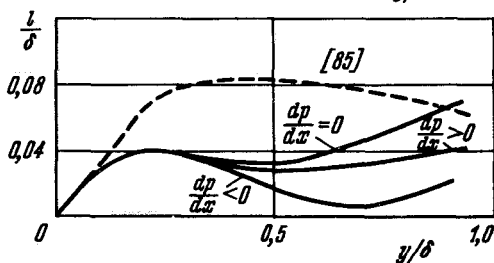
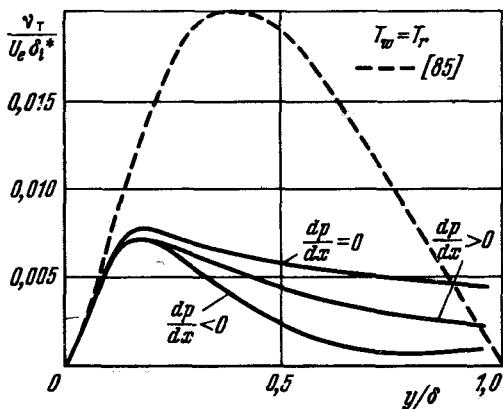
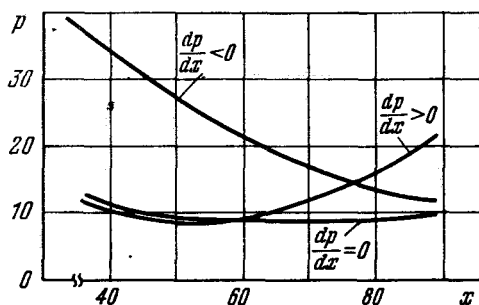


Рис. 12.

Тщательные измерения характеристик турбулентного пограничного слоя в окрестности локального отрыва, обусловленного взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем ($M_\infty = 7,2$), а также численные расчеты на основе интегрирования уравнений Рейнольдса в рамках двухслойной модели турбулентной вязкости проведены в [86]. Отметим, что при проведении расчетов границы между внешней и внутренними областями определялись из условия $(v_T)_i = (v_T)_0$. Согласование расчетных и экспериментальных данных по давлению $p(x)$ и интегральным характеристикам (трение, тепловой поток), оказалось более или менее удовлетворительным, но по профилям скорости в зоне отрыва согласование отсутствовало.

Подобный же подход к решению этой же задачи, использованный ранее в работе [87], не привел к удовлетворительным результатам по профилям скорости и распределению трения вблизи отрыва.

Приведенный краткий обзор лишь некоторых из исследований последнего времени достаточно определенно свидетельствует о наличии трудностей, возникающих при применении существующих полуэмпирических теорий турбулентности к расчету неравновесных турбулентных течений.

Одна из причин указанных трудностей уже отмечалась выше и, по-видимому, достаточно очевидна и заключается в "локальной" (или "дифференциальной") природе полуэмпирических теорий турбулентности, не учитывающих в необходимой степени предысторию течения. Классические опыты Клаузера [33] по исследованию затухания возмущения, возникшего на различных расстояниях от стенки в турбулентном пограничном слое, легли в основу современных представлений о релаксационных свойствах пограничного слоя. Согласно этим представлениям [18] внутренняя (пристеночная) область с характерной для нее мелкомасштабной турбулентностью, обладает "короткой памятью", т.е. затухание возмущений происходит на "коротких" расстояниях (порядка нескольких толщин пограничного слоя) от места возмущения. Внешняя область с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает "долгой памятью", т.е. для полного восстановления от возмущения требуются в общем случае расстояния, во много раз превышающие масштаб турбулентности.

Вторая из причин, обусловивших трудности применения полуэмпирических теорий к расчету неравновесных турбулентных течений, по-видимому, менее очевидна, чем первая, и связана она со способом "сращивания" ("стыковки") решений во внутренней и внешней областях.

Собственно, проблема сращивания заключается в отыскании рационального способа расчета границы между внутренней и внешней областями. В ранних исследованиях стыковка осуществлялась на фиксированных расстояниях от стенки, например при $y/\delta \approx 0,2$ [89, 34 и др.] (δ — толщина пограничного слоя). В большинстве последующих работ включая исследования по релаксационным моделям [88, 91] граница стыковки областей находилась из условия равенства локальных значений турбулентной вязкости

$$(\mu_t)_i = (\mu_t)_0 \quad \text{при} \quad y = y_m. \quad (2.189)$$

Здесь индексом m обозначены параметры на линии сращивания.

Авторы работы [90] в рамках двухпараметрического метода, в котором также использовалось условие (2.189), пытались при его реализации оценить тенденции в характере изменения толщины внутренней пристеночной области под действием положительного и отрицательного перепадов давления, однако эта попытка успеха не имела, хотя результаты сопоставления опытных и расчетных данных по интегральным характеристикам свидетельствовали в целом о достаточно высокой надежности и точности метода.

Четко выраженной тенденции убывания относительной толщины внутренней области под действием положительного перепада давле-

ния по мере приближения в точке отрыва не наблюдалось при использовании условия (2.189) и в более поздних работах других авторов [91].

Правильность использования условий (2.189) при расчетах неравновесных течений была, по-видимому, впервые подвергнута серьезному сомнению в работе Ривза [59].

Между тем нетрудно показать [92], что условие (2.189) некорректно, поскольку оно не приводит к правильному описанию масштаба внутренней области при наличии продольного перепада давления вообще и в точке отрыва в частности. Действительно, приравняем значения турбулентной вязкости во внутренней и внешней областях из выражений (2.165) и (2.175); для простоты положим демпфирующий множитель и коэффициент, учитывающий перемежаемость, равными единице. Такое упрощение естественно, поскольку демпфирующий множитель играет существенную роль лишь в буферной зоне, а коэффициент перемежаемости — лишь на внешней границе пограничного слоя. В результате будем иметь

$$\kappa^2 \bar{y}_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_m = k U_e \delta^* \quad (2.190)$$

Вводя в рассмотрение толщину пограничного слоя δ , преобразуем соотношение (2.190) к виду

$$\kappa^2 \bar{y}_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_m = k \bar{\delta}^*, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \bar{\delta}^* = \frac{\delta^*}{\delta}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_e} \quad (2.191)$$

Для оценки входящих в (2.191) величин $\bar{\delta}^*$ и $(\partial \bar{u} / \partial \bar{y})_m$ воспользуемся соотношениями Претша [46], хорошо согласующимися с опытными данными Никурадзе, Грушвитца и др. в широком диапазоне изменения продольных перепадов давления

$$\bar{u} = \bar{y}^{\frac{N^*-1}{2}}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{N^*-1}{2} \bar{y}^{\frac{N^*-3}{2}}, \quad \bar{\delta}^* = \frac{N^*-1}{N^*+1}, \quad N^* = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (2.192)$$

Здесь δ^{**} — толщина потери импульса, N^* — формпараметр пограничного слоя.

Подставляя второе и третье из соотношений (2.192) в равенство (2.191), после простых преобразований с учетом значений констант ($k = 0,0168$, $\kappa = 0,4$) найдем

$$\bar{y}_m = \left(\frac{0,21}{N^*+1} \right)^{\frac{2}{N^*+1}} \quad (2.193)$$

Вычисляя производную от $\bar{y}_m$ по N^* , получим

$$\frac{d\bar{y}_m}{dN^*} = \left(\frac{0,21}{N^*+1} \right)^{\frac{2}{N^*+1}} \frac{2}{(N^*+1)^2} [\ln(N^*+1) + 0,56] > 0. \quad (2.194)$$

Условие (2.194) показывает, что сращивание по локальным значениям турбулентной вязкости приводит к увеличению относительной толщины внутренней (пристеночной) области по мере приближения к точке отрыва (с ростом формпараметра N^*), что противоречит действительным тенденциям. Таким образом, условие (2.189) следует, по-видимому, признать некорректным.

То обстоятельство, что в приведенном анализе используются "грубые" аппроксимации Претша, не бросает тень на конечный результат анализа, поскольку значение имеет лишь качественное поведение профилей скорости Претша, в частности их деформация по мере приближения к точке отрыва¹.

Естественно, возникает вопрос о корректном способе сращивания решений во внутренней и внешней областях. Совершенно очевидным и бесспорным условием является условие непрерывности турбулентных касательных напряжений в точке сращивания

$$(\tau_T)_i = (\tau_T)_0 \quad y = y_m \quad (2.195)$$

Это условие, как правило, удовлетворяется при численном интегрировании уравнений турбулентного пограничного слоя в рамках двухслойных схем, а также при построении интегральных методов расчета. Однако достигается это обычно как результат выполнения двух условий, а именно, условия (2.189) и условия непрерывности первых производных от скорости по поперечной координате в точке сращивания.

Условие (2.189), как показано выше, вероятно, нельзя признать удовлетворительным. Следовательно, иным, чем условие непрерывности производных от скорости по поперечной координате, должно быть второе условие. Можно в дискуссионном порядке предположить, что производные от скорости должны претерпевать разрыв, если турбулентная вязкость описывается формулами типа формул Прандтля и Клаузера. В этом случае представляется вероятной возможность построения "второго демпфирующего множителя", позволяющего удовлетворительно описать поведение профиля скорости во "второй буферной области", т.е. в переходной области между зонами действия закона стенки и закона следа.

Приближенный анализ процессов во внутренней области при приближении к точке отрыва был проведен в § 10. Согласно этому ана-

¹ К выводу о некорректности сращивания (2.189) можно прийти из других соображений. Вычисляя производную $(\partial u / \partial y)_m$ в левой части равенства (2.190) из логарифмического профиля $u/v_* = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y v_*}{\delta} \right) + B$, найдем выражение для координаты сращивания

$$y_m / \delta^* = \sqrt{2} \kappa / (\kappa \sqrt{c_x}),$$

из которого следует, что по мере приближения к точке отрыва ($c_x \rightarrow 0$) относительная координата сращивания y_m / δ^* возрастает.

лизу в предотрывной области меняется структура течения во внутренней области: участок логарифмического профиля скоростей сокращается, в то же время возникает участок, на котором профиль скорости изменяется по "закону корня квадратного". Отмечалось, что имеющиеся опытные данные не позволяют достаточно надежно судить о характере изменения масштабов этих участков (логарифмического и корня квадратного) по мере приближения к точке отрыва.

Анализ процессов переноса во внутренней области при положительных перепадах давления на основе соображений размерности, проведенный в работе Перри, Белла и Жуберта [186], подтверждает сделанные выводы.

Отмеченные обстоятельства затрудняют разработку схем турбулентного пограничного слоя, учитывающих факт существования области "закона корня квадратного", иногда без должных оснований называемого аналогом закона стенки для отрывного сечения [24].

Возвращаясь к проблеме "сращивания" отметим, что она является составной частью более общей проблемы асимптотической теории турбулентного пограничного слоя. Попытки формального применения метода сращиваемых асимптотических разложений к описанию турбулентных течений уже предпринимались, однако существенные результаты в этом направлении пока не получены. В связи с этим выбор условия сращивания в большой степени продолжает оставаться скорее интуитивным, чем рациональным. Некоторые соображения об условиях сращивания в рамках двухпараметрического интегрального метода расчета турбулентного пограничного слоя будут приведены в § 19 следующей главы.

В заключение отметим, что проблемы полуэмпирической теории турбулентности для неравновесных турбулентных пограничных слоев не исчерпываются, естественно, рассмотренными выше аспектами. Однако можно надеяться, что решение проблемы сращивания и разработка достаточно обоснованных релаксационных моделей турбулентности (первые шаги в этом направлении уже делаются) позволят продвинуться вперед в решении проблемы предсказания свойств неравновесных турбулентных пограничных слоев.

Глава 3.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ОДНОРОДНОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

§ 12. ВВЕДЕНИЕ.

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ВОЗДУХА ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ. О СТРУКТУРЕ ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЫ

В настоящей главе рассматриваются некоторые результаты теоретических исследований характеристик турбулентного пограничного слоя на непроницаемой поверхности в однородном газовом потоке при наличии теплообмена между потоком и твердой стенкой. Однородность газового потока означает, по существу, однородность по составу. При отсутствии подачи вещества с поверхности тела посредством сублимации, пористого вдува и иных механизмов условие однородности состава газа в пограничном слое во многих случаях адекватно условию отсутствия химических реакций в потоке. Как известно, увеличение скоростей движения летательных аппаратов от небольших дозвуковых до умеренных сверхзвуковых приводит к необходимости учета зависимости плотности воздуха и коэффициентов переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры при расчете таких движений. Удельная теплоемкость воздуха при повышении температуры возрастает вследствие возбуждения колебательных степеней свободы (рис. 13). Однако если перепад температур в пограничном слое не очень велик, то при проведении приближенных расчетов теплоемкость воздуха можно считать постоянной величиной, приняв для нее значение, соответствующее некоторой средней температуре потока.

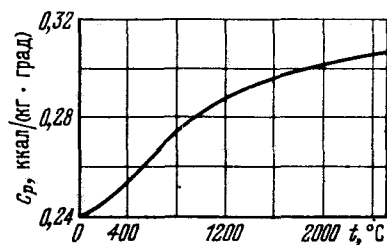


Рис. 13.

Дальнейший рост скоростей движения летательных аппаратов сопровождается таким увеличением температуры газа, что, наряду с переменностью плотности и коэффициентов переноса, может возникнуть необходимость в учете переменности теплоемкости от температуры. При этом следует иметь в

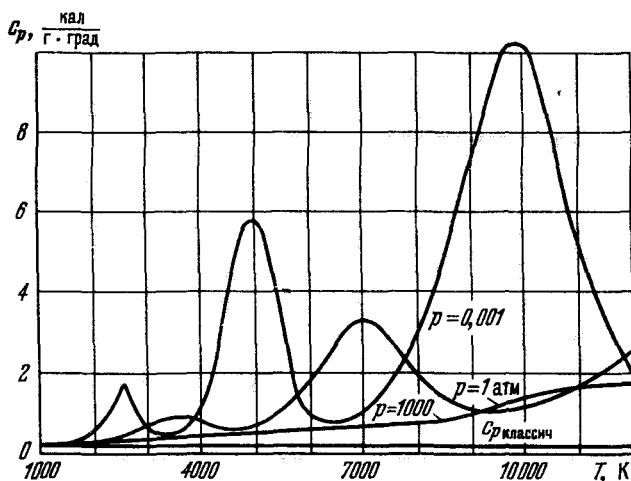


Рис 14.

ввиду, что основное значение имеют не абсолютные величины температуры, а перепад температур в пограничном слое (иначе говоря, разница между максимальной и минимальной температурой).

Переход к гиперзвуковым скоростям движения вызывает столь значительное повышение температуры газа, что в нем начинают протекать термохимические процессы: диссоциация молекул газа, ионизация атомов, образование окислов, излучение и т.д. Некоторое представление о влиянии этих процессов на "эффективную" теплоемкость воздуха в равновесных условиях дает рис. 14, заимствованный из работы [95], на котором приведены графики зависимости теплоемкости c_p от температуры при разных давлениях ("эффективной" теплоемкостью обычно называют теплоемкость, в которой наряду с обычной теплоемкостью учитываются тепловые эффекты термохимических процессов, протекающих в газе).

На рис. 15, заимствованном из той же работы Е.В.Ступоченко и др. [95], приведены вычисленные в статических условиях термодинамического равновесия молярные концентрации молекулярных, атомарных компонент воздуха и электронов в зависимости от температуры при трех значениях давления $p = 0,001$; 1 и 1000 атм. Как видно из рис. 15, при высоких температурах воздух представляет собою многокомпонентную смесь, состоящую из молекул кислорода O_2 , азота N_2 , окиси азота NO , атомов кислорода O , азота N , аргона Ar , электронов e^- . Кроме указанных компонент, в смеси присутствуют положительно заряженные ионы кислорода O^+ , азота N^+ , окиси азота NO^+ (на рис. 15 концентрации этих компонент не приведены). Содержание аргона и окиси азота в широком интервале изменения температур и давлений не превышает 1%, поэтому при проведении приближенных расчетов присутствием этих компонент можно пренебречь.

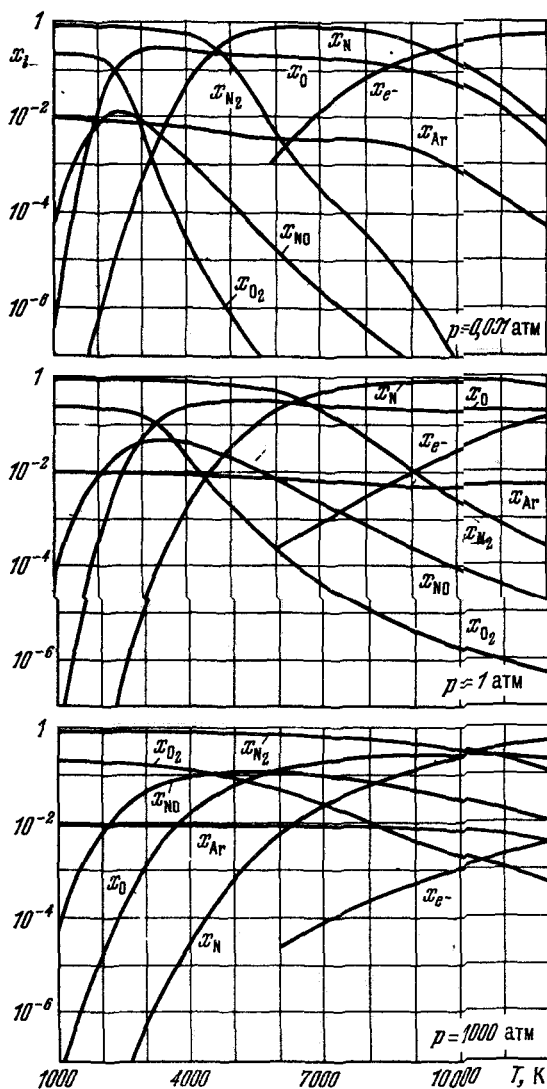


Рис. 15.

Вычисления равновесного состава воздуха в статических условиях [96] показывают, что благодаря значительному различию в энергии диссоциации кислорода и азота (5,08 эВ для O_2 и 9,756 эВ для N_2) диссоциация кислорода в основном заканчивается до начала диссоциации азота. Кроме того, благодаря высокому потенциалу ионизации для кислорода и азота (13,62 эВ для O и 14,55 эВ для N) диссоциация молекул кислорода и азота в значительной степени заканчивается до начала ионизации атомов O и N . Отме-

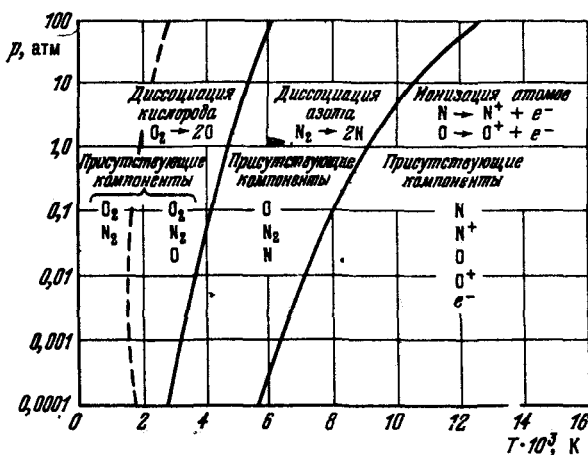


Рис. 16.

ченные особенности протекания химических реакций в воздухе при высоких температурах позволяют приблизительно выделить области изменения температуры и давления, для каждой из которых характерна та или другая реакция (рис. 16) [28]. Приведенное на рис. 16 разделение на области позволяет существенно упростить расчет течений воздуха при высоких температурах. В частности, из рис. 16 следует, что условие однородности потока воздуха выполняется в широком диапазоне изменения давления при температурах в потоке меньших 2000 К. Из оценки равновесной температуры теплоизолированной поверхности плоской пластины, обтекаемой под нулевым углом атаки сверхзвуковым потоком, приближенно следует, что температура в пограничном слое не превышает указанную величину 2000 К вплоть до чисел Маха, равных шести-семи, если температура воздуха на бесконечности не выходит за рамки диапазона $220 \div 300$ К.

Рассматриваемый диапазон температур и чисел Маха представляет наибольший интерес для многих современных технических приложений. Именно поэтому из многочисленных вопросов экспериментальной аэродинамики вопрос об определении турбулентного поверхностного трения, прежде всего, и других характеристик турбулентного пограничного слоя, вообще, на протяжении многих лет оставался одной из наиболее актуальных и распространенных тем для исследования. Достаточно подробный обзор результатов экспериментальных исследований характеристик турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковых потоках, выполненных до 1967 г., содержится в первом издании настоящей монографии [35]. В последующие годы были опубликованы результаты подобных же исследований [97-99, 122-125], которые дополнили прежние результаты, однако не привели к обнаружению каких-либо ранее неизвестных свойств турбулентных пограничных слоев в сверхзвуковых потоках газа.

В настоящей главе будут рассмотрены методы расчета турбулентного пограничного слоя в однородном по составу сверхзвуковом газовом потоке. При этом главное внимание будет уделено интегральным методам расчета, достаточно хорошо апробированным и прошедшим проверку временем. Что касается численных методов, получивших сравнительно широкое распространение в практике специалистов по механике жидкости и газа в последние годы, то здесь будут рассмотрены лишь некоторые аспекты их применения и даны ссылки на соответствующую литературу. Подобный подход к отбору рассматриваемых ниже методов расчета, по-видимому, нуждается в аргументации.

Предпочтение, отдаваемое интегральным методам перед численными, выглядит в настоящее время не слишком обоснованным, поскольку численные главным образом конечно-разностные методы расчета лишены многих, иногда крупных, недостатков, присущих интегральным методам. Точность численных методов практически определяется точностью тех гипотез турбулентности, которые используются для замыкания уравнений пограничного слоя. Так принято считать, и с этим трудно не согласиться. Добавим к этому, о чем упоминалось выше, что при расчете неравновесных пограничных слоев существенное влияние на точность расчета могут оказать условия "стыковки" (подробно этот вопрос рассматривался в п. 7 § 11).

В пользу интегральных методов расчета свидетельствуют следующие обстоятельства: эти методы более просты, наглядны, как правило, их применение требует существенно меньшего профессионализма в практической реализации на ЭВМ, и, наконец, эти методы могут просто не уступать по точности численным методам. Напомним в связи с этим, что в выводах Стэнфордской конференции 1968 г. [81] достаточно ясно сказано о том, что лучшие интегральные методы не уступают по точности численным методам, а в ситуациях, относящихся к неравновесным пограничным слоям, точность или неточность тех и других методов примерно одинакова. На наш взгляд, требования "простоты" и "меньшего профессионализма" очень важны и актуальны в настоящее время, когда методы механики жидкости и газа еще только начинают распространяться в "нетрадиционных" технических областях, таких как металлургия, химическая технология и др.

Приведенные соображения положены в основу отбора методов расчета. В принципе же задача классификации существующих методов расчета и отбора на основе этой классификации "оптимальных" методов — задача чрезвычайно непростая, если учесть, что литература по методам расчета турбулентных пограничных слоев в газовых потоках включает десятки названий. Попытка подобной, во многом удачной, на наш взгляд, классификации предпринята в известной монографии Патанкара и Сполдинга [34].

§ 13. О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ

13.1. Исходные уравнения. Ограничимся рассмотрением стационарного двумерного (плоского и осесимметричного) течения в пограничном слое однородного по составу газового потока. В этом случае система уравнений осредненного турбулентного движения (2.81) (плоское течение) и система уравнений (2.84) (осесимметричное течение), если принять предположение о малости толщины слоя по сравнению с радиусом поперечной кривизны, могут быть записаны в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \chi_0^\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \chi_0^\gamma) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial y}, \quad (3.2)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(q_\Sigma + u \tau_\Sigma). \quad (3.3)$$

Здесь $\chi_0(x)$ — радиус поперечной кривизны, $\gamma = 0$ для плоского течения, $\gamma = 1$ для осесимметричного течения, H — полная энтальпия, выражаемая равенством (2.82).

Вместо уравнения (3.3) может быть при необходимости использована другая форма уравнения переноса энергии (2.83), записанная через энтальпию газа.

Полные касательное напряжение τ_Σ и тепловой поток q_Σ , в общем случае выражаемые равенствами (2.78) и (2.80) соответственно, в рассматриваемом случае имеют вид

$$\tau_\Sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'' v''}, \quad (3.4)$$

$$q_\Sigma = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \rho \overline{v'' h''}. \quad (3.5)$$

При этом в выражении для q_Σ учтено, что в однородном по составу газовом потоке имеет место лишь один механизм молекулярного переноса энергии, а именно перенос энергии за счет молекулярной теплопроводности (в этом случае формула (1.99) переходит в формулу Фурье).

Принимая допущение о градиентном характере переноса количества движения и тепла в турбулентном движении и вводя в рассмотрение турбулентные аналоги коэффициентов вязкости и теплопроводности

$$\mu_\tau = \frac{-\rho \overline{u'' v''}}{\partial u / \partial y}, \quad \lambda_\tau = \frac{-\rho \overline{v'' h''}}{\partial T / \partial y}, \quad (3.6)$$

приведем соотношения (3.4) и (3.5) к виду

$$\tau_{\Sigma} = (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.7)$$

$$q_{\Sigma} = (\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda_{\Sigma} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (3.8)$$

В равенствах (3.7), (3.8) введены в рассмотрение полные коэффициенты переноса количества движения и тепла в турбулентном движении

$$\mu_{\Sigma} = \mu + \mu_T, \quad \lambda_{\Sigma} = \lambda + \lambda_T. \quad (3.9)$$

Применительно к наиболее широко применяемой в последние годы в численных расчетах двухслойной модели турбулентного пограничного слоя, согласно которой весь слой делится на две области: внутреннюю (область закона стенки) и внешнюю (область закона следа), введенные равенствами (3.9) коэффициенты переноса трансформируются в эффективные вязкость и теплопроводность во внутренней области и турбулентные вязкость и теплопроводность во внешней области. Иными словами, имеем

$$\mu_{\Sigma} = \mu_{\text{эфф}}, \quad \lambda_{\Sigma} = \lambda_{\text{эфф}} \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq y_m, \quad (3.10)$$

т.е. во внутренней области, и

$$\mu_{\Sigma} = \mu_T, \quad \lambda_{\Sigma} = \lambda_T \quad \text{при} \quad y_m \leq y \leq \delta, \quad (3.11)$$

т.е. во внешней области. Здесь y_m — координата границы внутренней и внешней областей, δ — толщина пограничного слоя.

Гипотезы эффективной вязкости были подробно рассмотрены в пп. 11.3, 11.4 § 11. Здесь лишь подчеркнем, что понятие эффективной вязкости включает в себя в качестве неперемного элемента учет взаимодействия процессов молекулярного и турбулентного переноса вблизи твердой поверхности.

Гипотезы турбулентной вязкости для внешней области были рассмотрены в п. 11.5 § 11.

13.2. Эффективная и турбулентная теплопроводность. Эффективное и турбулентное числа Прандтля. По аналогии с понятием эффективной вязкости выше было введено в рассмотрение понятие эффективной теплопроводности

$$\lambda_{\text{эфф}} = \lambda + \lambda_T. \quad (3.12)$$

Величина $\lambda_{\text{эфф}}$ включает в себя в качестве составляющих молекулярную теплопроводность λ и турбулентную теплопроводность λ_T , учитывающую взаимодействие процессов молекулярного и молекулярного переноса тепла в пристеночной области. Следует, однако, заметить, что в теории турбулентных пристенных течений вплоть до последнего времени редко использовалось понятие эффективной (турбулентной) теплопроводности, поскольку большинство полуэмпирических гипотез

турбулентности сформулировано применительно к коэффициентам переноса количества движения.

Расчет коэффициентов турбулентного переноса тепла обычно основывается на тех или иных допущениях об аналогии между переносом тепла и количества движения. Формы этой аналогии довольно многообразны, однако общим для большинства подходов является использование понятий турбулентного и в последние годы эффективного чисел Прандтля. Эти числа вводятся по аналогии с молекулярным числом Прандтля равенствами

$$Pr_{эфф} = \frac{\mu_{эфф} c_p}{\lambda_{эфф}}, \quad Pr_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}. \quad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что особой надобности во введении понятия эффективного числа Прандтля, так же как и полных коэффициентов переноса, не возникает. Введение их в основном обусловлено удобством записи уравнений и потоков различных субстанций. Действительно, из равенств (3.12), (3.13) с учетом определения эффективной вязкости $\mu_{эфф} = \mu + \mu_T$ легко получить соотношение

$$\frac{\lambda_{эфф}}{c_p} = \frac{\mu_{эфф}}{Pr_{эфф}} = \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_{эфф} - \mu}{Pr_T}. \quad (3.14)$$

Из соотношений (3.14) следует, что для определения эффективной теплопроводности $\lambda_{эфф}$ и эффективного числа Прандтля $Pr_{эфф}$ необходимо знать характер изменения турбулентного числа Прандтля Pr_T в пристеночной области пограничного слоя.

При описании процесса турбулентной теплопроводности во внешней области турбулентного пограничного слоя также удобно пользоваться понятием турбулентного числа Прандтля (второе из равенств (3.13)). Таким образом, проблема расчета турбулентной теплопроводности по сечению пограничного слоя адекватна проблеме определения турбулентного числа Прандтля Pr_T .

Строгой теории для расчета числа Pr_T в настоящее время, естественно, не существует. Отсутствуют систематические опытные данные, позволяющие надежно оценить влияние тех или иных факторов на это число. Тем не менее уже накоплен некоторый опыт построения различных моделей и методов определения турбулентного числа Прандтля.

Первая по времени модель числа Pr_T , истоки которой восходят еще к классическим работам О. Рейнольдса, основывается на предположении об общности механизмов переноса тепла и количества движения. "Общность" в данном случае можно рассматривать как свойство пассивности ("гипотеза пассивности") турбулентных носителей (молей) к переносимой ими субстанции (тепло, количество движения). Согласно этой гипотезе число Pr_T должно равняться единице (ана-

логия Рейнольдса). Надо отметить, что допущение о равенстве единице числа Pr_T длительное время широко использовалось в расчетах процессов турбулентного переноса тепла. Нередко используется это допущение и в настоящее время. Основанием для этого служили довольно обширные опытные данные, полученные путем непосредственных оценок величины числа Pr_T по измерениям профилей скорости и температуры при течении в трубах, каналах и пограничных слоях. Согласно этим экспериментам, проведенным в воздухе, значение числа Pr_T оказывалось немного меньше единицы ($0,8 \leq Pr_T \leq 1$). Однако в опытах по теплообмену в жидких металлах наблюдались числа Pr_T , немного превышающие единицу ($Pr_T < 1,2$).

В последние годы наибольшее предпочтение многими авторами отдавалось значению $Pr_T = 0,86 \div 0,90$.

Одна из первых попыток создания модели числа Pr_T , относящаяся к 1951 г., принадлежит Дженкинсу [144]. Модель основывалась на прандтлевской гипотезе пути смешения и учитывала теплообмен между турбулентным молекул и окружающей средой при движении молекул в поперечном к основному потоку направлении. Результаты расчетов по модели Дженкинса плохо согласовывались с полученными впоследствии опытными данными.

В работе Мейера и Ротты [143] в основу модели турбулентного числа Прандтля была положена модифицированная Ван-Дристом гипотеза пути смешения (п. 11.3). Выражение пути смешения применительно к переносу тепла представлялось в виде

$$l_q = \frac{l}{\sqrt{Pr_T}} = \kappa_q y \left[1 - \exp \left(- \frac{y \sqrt{\tau_w \rho}}{\mu A_q} \right) \right],$$

где постоянные κ_q и A_q отличны от постоянных Кармана ($\kappa = 0,4$) и Ван-Дриста ($A = 26$) и должны определяться из опыта.

Число Pr_T определялось из соотношения

$$Pr_T = c_p \frac{\tau - \tau_n}{q - q_n} \frac{\partial T}{\partial y} \bigg| \frac{\partial u}{\partial y};$$

здесь

$$\tau_n = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_n = \lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$q = c_p \left(\frac{\mu}{Pr_T} + \frac{\rho l^2}{Pr_T} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\tau = \left(\mu + \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

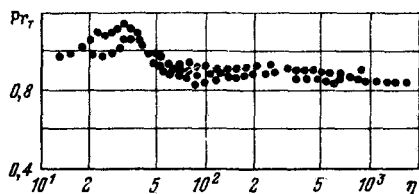


Рис. 17.

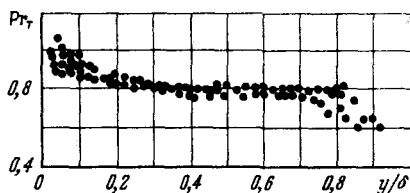


Рис. 18.

В предельных случаях оказывается

$$Pr_T = \left(\frac{x}{x_q} \frac{A_q}{A} \right)^2 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$Pr_T = \left(\frac{x}{x_q} \right)^2 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

Значения постоянных, найденные авторами [143] в результате сопоставления расчетных и опытных данных по профилям температуры были равны: $(x/x_q)^2 = 0,86$, $A_q/A = 1,25$. В этом случае турбулентные числа Прандтля изменяются от значения $Pr_T = 1,36$ на стенке до значения $Pr_T = 0,86$ на внешней границе пограничного слоя.

На рис. 17 и 18, заимствованных из работы [143], приведено изменение числа Pr_T поперек пограничного слоя при различных числах Маха. На рис. 17 представлены данные, полученные на пластине ($2,5 < M_e < 4,5$), на рис. 18 – в плоском сопле ($1,7 < M_e < 2,9$)

Из рис. 17 следует, что при $\eta = y v_* / \nu_w < 50$ число Pr_T выше, чем в остальном пограничном слое. Это свидетельствует о том, что в буферной области перенос тепла осуществляется интенсивнее, чем перенос количества движения. Качественно это согласуется с предсказываемой моделью Мейера – Ротты тенденцией роста числа Pr_T по мере приближения к стенке. В области $\eta > 50$ число Pr_T близко к указанным выше значениям 0,86–0,90. Данные рис. 18 также подтверждают отмеченные тенденции.

Близкую к модели Мейера – Ротты по исходным предпосылкам модель числа Pr_T предложил Себеси [142]. Согласно этой модели

$$Pr_T = \frac{x}{x_q} \frac{1 - e^{-\eta/A}}{1 - e^{-\eta/A_q}}. \quad (3.15)$$

Отличие от модели [143] сводится, по существу, к учету эмпирической зависимости постоянных x , x_q , A , A_q (обозначения те же, что и выше) от числа Рейнольдса (Re^{**}), что дало возможность

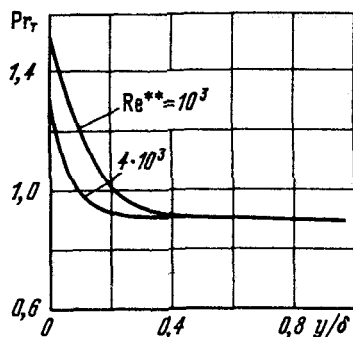


Рис. 19.

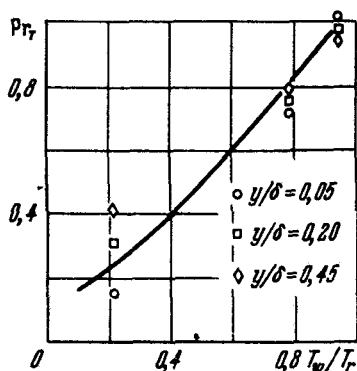


Рис. 20.

учесть влияние этого числа на Pr_T . В работе [142] указанная модель обобщена на течение сжимаемого газа с продольным перепадом давления и массообменом (вдув). Результаты расчетов по приведенному соотношению представлены на рис. 19.

Графики на рис. 19 показывают, что во внешней части пограничного слоя число Pr_T постоянно и равно примерно 0,9. По мере приближения к стенке число Pr_T растет. В цитируемой работе Себеси были проведены численные расчеты характеристик турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости с учетом переменности числа Pr_T вблизи стенки. На основании расчетов был сделан вывод о том, что учет переменности числа Pr_T практически не сказался на характеристиках теплообмена — числе Стэнтона и температурных профилях.

О влиянии температурного фактора на турбулентное число Прандтля известно сравнительно мало. На рис. 20 приведены зависимости числа Pr_T от температурного фактора, полученные в уже цитированной работе Ли и Смита [83], при числе $Me = 5$. Видно, что число Pr_T непостоянно по сечению в пристеночной области и существенно зависит от интенсивности теплообмена между газом и стенкой.

Исследование зависимости турбулентного числа Прандтля от его молекулярного аналога и числа Рейнольдса без учета вида течения и положения рассматриваемой точки в потоке на основе "корреляционной" модели коэффициентов турбулентного переноса проведено Рейнольдсом [141]. В результате для турбулентного числа Прандтля было получено выражение

$$Pr_T = \frac{1 + c_1 (Re Pr)^{-1/2}}{1 + c_2 (Re)^{-1/2}}. \quad (3.16)$$

Здесь Re — число Рейнольдса среднего течения. Постоянные c_1 и c_2 выбраны из условия согласования с опытными данными и имеют значения $c_1 = 86$, $c_2 = 200$.

Из соотношения (3.16) следует, что $Pr_T \rightarrow 1$ при $Re \rightarrow \infty$. Кроме того,

$Pr_T < 1$ при $Pr \approx 1$ для всех значений числа Рейнольдса, кроме самых высоких. Результаты расчетов числа Pr_T по соотношению (3.16) приведены на рис. 21. Эти результаты позволяют, по мнению автора [141], предположить, что характерное различие в значениях числа Pr_T для свободной и пристеночной турбулентности в основном связано с низкими числами Рейнольдса, типичными для течений первого класса (число Рейнольдса определяет уровень турбулентности в потоке).

Из исследований, посвященных другим аспектам проблемы турбулентного числа Прандтля, укажем на работу [145].

Оценивая полученные в рассматриваемой области результаты в целом, следует, по-видимому, признать, что в теоретическом плане проблема предсказания числа Pr_T еще далека от своего решения. При практических расчетах можно ограничиться допущением о постоянстве числа Pr_T в пограничном слое. Для течений воздуха в качестве значения этого числа можно принять $Pr_T = 0,86-0,90$.

Различные формы уравнения энергии. Принимая во внимание равенства (3.7), (3.8) и используя представление о полном числе Прандтля (3.12), приведем уравнение энергии (3.3) к следующему виду:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_E}{Pr_E} c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \mu_E \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (3.17)$$

Замечая, что в общем случае течения газа с переменной теплоемкостью $c_p(T)$ полная энтальпия H выражается равенством

$$H = \int_0^T c_p dT + \frac{u^2}{2} \quad (3.18)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right), \quad (3.19)$$

преобразуем уравнение (3.17) к форме

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_E \left[\frac{\partial H}{\partial y} + \left(\frac{1}{Pr_E} - 1 \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right\}, \quad (3.20)$$

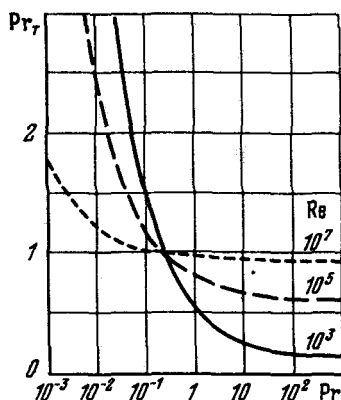


Рис. 21.

где

$$h = \int_0^T c_p dT.$$

Переходя в уравнении (3.20) от полной энтальпии H к энтальпии h и принимая во внимание уравнения движения (3.2), будем иметь

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{\Sigma}}{Pr_{\Sigma}} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3.21)$$

13.3. Уравнения турбулентного пограничного слоя в физических переменных (постановка задачи). С учетом проведенных преобразований система уравнений (3.1) – (3.3) приводится к следующей основной форме, которую для определенности назовем первой

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v_0') + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v_0') &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_{\Sigma} \left[\frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{1}{Pr_{\Sigma}} - 1 \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Вторая основная форма уравнений пограничного слоя получается из первой заменой третьего уравнения на уравнение (3.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v_0') + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v_0') &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{\Sigma}}{Pr_{\Sigma}} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Если внешний поток можно считать изэнтропическим, то связь между давлением и скоростью на внешней границе пограничного слоя выражается уравнением Бернулли

$$- \frac{dp}{dx} = \rho_e U_e \frac{dU_e}{dx}. \quad (3.24)$$

Граничные условия для системы уравнений (3.22), (3.24) в случае обтекания непроницаемой поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad H = h_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u \rightarrow U_e, \quad H \rightarrow H_e \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Для системы уравнений (3.23), (3.24) граничные условия на непроницаемой поверхности записываются в форме

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad h = h_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u \rightarrow U_e, \quad h \rightarrow h_e \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Кроме условий на поверхности и внешней границе пограничного слоя, должны быть заданы профили скоростей и полных энтальпий (энтальпий) в том сечении пограничного слоя, от которого начинается интегрирование (начальное сечение).

13.4. Уравнения турбулентного пограничного слоя в переменных Дородницына - Лиза (постановка задачи). Размерные уравнения (3.22) или (3.23) неудобны для непосредственного интегрирования по ряду причин. Прежде всего целесообразно уменьшить число уравнений в этих системах с трех до двух. Это можно сделать, вводя в рассмотрение функцию тока $\psi(x, y)$, которая тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u \tau_0^2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v \tau_0^2. \quad (3.27)$$

Далее для "ослабления" связи между уравнениями движения и энергии полезно перейти в этих уравнениях от переменных x, y к переменным Дородницына - Лиза ξ, η [100], широко применяемым в теории ламинарного пограничного слоя

$$\xi = \int_0^x U_e \mu_e \rho_e \tau_0^2 dx, \quad \eta = \frac{U_e \tau_0^2}{\sqrt{\xi}} \int_0^y \rho dy. \quad (3.28)$$

Формулы перехода от переменных x, y к переменным ξ, η , как нетрудно показать, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (3.29)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \rho_e U_e \mu_e \tau_0^2, \\ \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\rho U_e \tau_0^2}{\sqrt{2\xi}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Вводя в рассмотрение безразмерные величины: функцию тока f ,

полную энтальпию g , энтальпию θ и функции l , β , c^2 , α :

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{2\xi}}, \quad g = \frac{H}{H_e}, \quad \theta = \frac{h}{h_e}, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e}, \quad (3.31)$$

$$\beta = \frac{2 d \ln U_e}{d \ln \xi}, \quad c^2 = \frac{U_e^2}{H_e}, \quad \alpha = \frac{d \ln h_e}{d \ln \xi}$$

- и замечая, что

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f_\eta = \frac{u}{U_e}, \quad (3.32)$$

преобразуем первую форму уравнений движения и энергии (второе и третье из уравнений (3.22)) с учетом уравнения (3.24) к следующему виду:

$$\left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu} l f_{\eta\eta} \right)_\eta + f f_{\eta\eta} + 2\beta \left(\frac{\rho_e}{\rho} - f^2 \right) = 2\xi (f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}), \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu} \frac{l}{Pr_\Sigma} g_\eta \right)_\eta + f g_\eta + c^2 \left[\frac{\mu_\Sigma}{\mu} \left(1 - \frac{1}{Pr_\Sigma} \right) l f_\eta f_{\eta\eta} \right] = \\ & = 2\xi (f_\eta g_\xi - f_\xi g_\eta). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Уравнение энергии, записанное через энтальпию h (2-я основная форма, третье уравнение в системе (3.23)), в переменных Дороничина - Лиза приобретает форму

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu} \frac{l}{Pr_\Sigma} \theta_\eta \right)_\eta + f \theta_\eta + \frac{U_e^2}{h_e} \frac{\mu_\Sigma}{\mu} l f^2_{\eta\eta} = \\ & = f_\eta \left(2 \frac{U_e^2}{h_e} \beta \frac{\rho_e}{\rho} + 2\theta\alpha \right) + 2\xi (f_\eta \theta_\xi - \theta_\eta f_\xi). \end{aligned} \quad (3.35)$$

При необходимости определения проекции скорости на ось y эта величина может быть найдена из соотношения

$$-\rho v v_0' = \eta_x f_\eta \sqrt{2\xi} - \xi_x \left(\sqrt{2\xi} f_\xi + \frac{f}{\sqrt{2\xi}} \right). \quad (3.36)$$

Уравнения (3.33) - (3.35) переходят в уравнения ламинарного пограничного слоя, если в них положить $\mu_\Sigma = \mu$, $Pr_\Sigma = Pr$.

Граничные условия к уравнениям (3.33), (3.34) или (3.35) на непроницаемой поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} f = f_\eta = 0, \quad g = g_w \text{ (или } \theta = \theta_w) \text{ при } \eta = 0, \\ f_\eta \rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1 \text{ (или } \theta \rightarrow 1) \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Кроме того, в начальном сечении ($\xi = \xi_n$) должны быть заданы профили скоростей $f_\eta(\xi_n, \eta)$ и полных энтальпий $g(\xi_n, \eta)$ (или энтальпий $\theta(\xi_n, \eta)$).

Применение преобразования Дороднищина – Лиза к уравнениям турбулентного пограничного слоя в газе, естественно, не дает в большой степени тех преимуществ, к которым приводит их использование в теории ламинарного пограничного слоя. В частности, применение решения оказывает "автомодельный" характер переменной η , что обусловлено существенно иной зависимостью толщины турбулентного слоя от числа Рейнольдса по сравнению с аналогичной зависимостью в ламинарном слое. Отметим, что в рамках большинства современных полуэмпирических гипотез турбулентности уравнения турбулентного пограничного слоя не допускают строгих автомодельных решений.

Немаловажную роль играет и то обстоятельство, что уравнения турбулентного пограничного слоя существенно более нелинейны по сравнению с уравнениями ламинарного слоя. В связи с этим при построении численного алгоритма нередко возникает необходимость еще одного преобразования поперечной координаты, с тем чтобы увеличить число точек сетки в вязком подслое и пристеночной области. В качестве таких преобразований могут быть использованы преобразования логарифмического вида

$$\eta_1 = A \ln \left(1 + \frac{\eta}{b} \right),$$

где параметры A и b выбираются таким образом, чтобы можно было сгущать расчетные точки вблизи стенки.

Иногда для тех же целей применяется преобразование иного типа [103]

$$\eta_1 = 1 - e^{-A\eta},$$

где $A > 0$ – некоторая постоянная.

К настоящему времени накоплен некоторый положительный опыт по интегрированию уравнений турбулентного пограничного слоя в переменных Дороднищина – Лиза [101–103]. В первых двух из указанных работ [101, 102] для решения был использован известный численный метод И.В. Петухова [104], в работе [103] успешно применен метод В.Г. Громова [105].

1.3.5. Уравнения турбулентного пограничного слоя в переменных Крокко (постановка задачи). Интеграл Крокко. Преобразование уравнений пограничного слоя к переменным Крокко $\xi = x$, $\eta = u(x, y)$ было подробно рассмотрено в п.8.6. Здесь ограничимся тем, что приведем эти уравнения с учетом соотношений (3.7), (3.8) и (3.12).

Уравнения движения (2.103) и энергии (2.105) при этом примут вид

$$\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu_{\Sigma} \rho}{\tau_{\Sigma}} \right) + \frac{\partial^2 \tau_{\Sigma}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_{\Sigma}}{\tau_{\Sigma}} \right) \frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (3.38)$$

$$\rho \eta \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{dp}{d\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\tau_{\Sigma}}{\mu_{\Sigma}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\tau_{\Sigma}}{\rho \tau_{\Sigma}} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \left(1 - \frac{1}{\rho \tau_{\Sigma}} \right) \eta \tau_{\Sigma} \right] - \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right\}. \quad (3.39)$$

Если перейти в левую часть уравнения энергии (3.39) от полной энтальпии $H = h + u^2/2$ к энтальпии h , то это уравнение запишется в форме

$$\rho \eta \frac{\partial h}{\partial \xi} = \left(\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \frac{dp}{d\xi} + \frac{\tau_{\Sigma}}{\mu_{\Sigma}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau_{\Sigma}}{\rho \tau_{\Sigma}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \tau_{\Sigma} - \frac{\partial \tau_{\Sigma}}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right]. \quad (3.40)$$

Граничные условия к уравнениям (3.38), (3.39) или (3.40) имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{\Sigma} &= \tau_w, \quad H = h_w \quad (\text{или } h = h_w) \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ \tau_{\Sigma} &= 0, \quad H = H_e \quad (\text{или } h = h_e) \quad \text{при} \quad \eta = U_e. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В начальном сечении $(\xi - \xi_n)$ должны быть, как обычно, заданы профили полных напряжений трения $\tau_{\Sigma} = \tau_{\Sigma}(\xi_n, \eta)$, полных энтальпий $H = H(\xi_n, \eta)$ (или энтальпий $h = h(\xi_n, \eta)$).

Как следует из граничных условий (3.41), преобразование Крокко позволяет свести полубесконечную область интегрирования $(0 \leq \eta \leq \infty)$ к полосе шириной $0 \leq \eta \leq U_e$. Применение переменных Крокко обеспечивает равномерное распределение расчетных узлов при построении численных методов, позволяет сгустить расчетные точки вблизи поверхности, т.е. в области наиболее интенсивного изменения всех параметров. Некоторым недостатком преобразования Крокко является требование монотонности профиля скорости по толщине пограничного слоя. Переменные Крокко довольно широко использовались при построении интегральных методов расчета турбулентно-

го пограничного слоя в газовых потоках [35], однако опыт непосредственного интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя в переменных Крокко пока еще невелик. Укажем в связи с этим на работу Г.Н. Емельяновой [106], в которой предложен неявный конечно-разностный метод интегрирования этих уравнений применительно к течениям несжимаемой жидкости (программа численного решения, составленная Г.Н. Емельяновой, приведена в монографии К.К. Федяевского, А.С. Гиневского, А.В. Колесникова [30]).

Определенный интерес может представить также работа Миллса [107], предложившего численный метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости в переменных Крокко применительно к неавтомоделным течениям. В более ранней работе того же автора [108] рассмотрено применение переменных Крокко к задаче о смешении двух потоков.

В частном случае обтекания плоской пластины ($dp/d\xi = 0$) при равенстве полного числа Прандтля единице ($Pr_\infty = 1$) уравнение (3.39) принимает вид

$$\rho\eta \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\tau_\infty^2}{\mu_\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}. \quad (3.42)$$

Нетрудно видеть, что при независимости граничных условий для полной энтальпии (3.41) от продольной координаты ($h_w = \text{const}$,

$H_e = \text{const}$) уравнение (3.42) допускает частное решение $H = H(\eta)$, которое получается из уравнения $d^2H/d\eta^2 = 0$ и граничных условий. Это частное решение, именуемое интегралом Крокко, имеет вид

$$\frac{H - h_w}{H_e - h_w} = \frac{\eta}{U_e}. \quad (3.43)$$

Переходя в равенстве (3.43) от полной энтальпии H к энтальпии h , получим

$$h = h_w + (H_e - h_w) \frac{\eta}{U_e} - \frac{1}{2} \eta^2. \quad (3.44)$$

В предположении о постоянстве удельной теплоемкости газа ($c_p = \text{const}$) выражение (3.34) легко преобразуется к традиционной форме интеграла Крокко

$$\frac{T}{T_w} = 1 - \omega \bar{u} - \beta \bar{u}^2, \quad \bar{u} = \eta / U_e = u / U_e. \quad (3.45)$$

Здесь

$$\omega = 1 - \frac{T_e}{T_w} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right), \quad \beta = \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \frac{T_e}{T_w}. \quad (3.46)$$

К аналогичным результатам можно прийти при независимости граничных условий для h от продольной координаты и на основе уравнения (3.40), которое в рассматриваемом случае ($dp/d\xi = 0$, $P_{r_\Sigma} = 1$) принимает вид $d^2 h / d\eta^2 = -1$.

13.6. Уравнения турбулентного пограничного слоя в переменных Мизеса (постановка задачи). В системе уравнений (3.22) перейдем от переменных x, y к переменным $\xi = x, \psi$, где ψ — функция тока, определяемая, согласно первому уравнению системы (3.22), равенствами

$$\rho u v_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v v_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.47)$$

Формулы перехода от старых переменных к новым имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \rho v v_0 \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi} = \rho u v_0 \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Отметим, что $\partial \xi / \partial y = 0$, поскольку $\xi = x$, а x и y — независимые переменные.

Совершая в уравнениях (3.22) переход к переменным ξ, ψ , согласно соотношениям (3.48), будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho u} \frac{dp}{d\xi} + v_0^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu_\Sigma \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = v_0^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \mu_\Sigma \rho u \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} + \left(\frac{1}{P_{r_\Sigma}} - 1 \right) \frac{\partial h}{\partial \psi} \right] \right\}. \quad (3.50)$$

Уравнение энергии, записанное через энтальпию (третье уравнение системы (3.23)), в переменных Мизеса приобретает вид

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} + v_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu_\Sigma \rho u}{P_{r_\Sigma}} \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) + \mu_\Sigma \rho u \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 \right]. \quad (3.51)$$

Система уравнений (3.49), (3.50) (или (3.49), (3.51)) должна интегрироваться при граничных условиях

$$\begin{aligned} u=0, \quad H=h_w \quad (\text{или } h=h_w) \quad \text{при } \psi=0, \\ u=U_e, \quad H=H_e \quad (\text{или } h=h_e) \quad \text{при } \psi=\psi_e. \end{aligned} \quad (3.52)$$

В начальном сечении ($\xi = \xi_n$) следует задать распределение скоростей $u(\xi_n, \psi)$ и полных энтальпий $H(\xi_n, \psi)$ или энтальпий $h(\xi_n, \psi)$.

При необходимости интервал интегрирования $0 \leq \psi \leq \psi_e$ легко преобразовать в полосу $0 \leq \bar{\psi} \leq 1$ введением безразмерной функции тока $\bar{\psi} = \psi / \psi_e$. Подобный прием был, в частности, широко использован в работе Патанкара и Сполдинга [34]. В этой же работе приведена на языке Фортран-IV и подробно описана программа численного метода интегрирования уравнений пограничного слоя в переменных Мизеса. Оценивая возможности применения переменных Мизеса, следует иметь в виду трудности решения проблемы эффективного расположения расчетных точек поперек пограничного слоя.

13.7. О численных методах интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя. Среди численных методов интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя наиболее разработанными являются конечно-разностные методы. При выборе численного метода применительно к той или иной конкретной задаче необходимо иметь в виду, что уравнения турбулентного пограничного слоя являются существенно более нелинейными по сравнению с уравнениями ламинарного пограничного слоя, значительно могут различаться также "темпы" изменения толщины ламинарного и турбулентного пограничных слоев вниз по потоку. Эти и некоторые другие обстоятельства не позволяют во многих случаях непосредственно воспользоваться хорошо зарекомендовавшими себя методами расчета ламинарного пограничного слоя. Вследствие указанных причин к настоящему времени накоплен достаточно обширный опыт построения численных схем с учетом специфических свойств турбулентного пограничного слоя.

В работе Плетчера [109] предложена явная (второго порядка точности) разностная схема расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Исходные уравнения записывались в физических переменных. Обобщение этого метода на течения сжимаемого газа было дано в монографии В.М. Иевлева [25]. Явные схемы второго порядка точности по поперечной координате и первого — по продольной использованы в работах Брэдшоу, Ферриса [110] и Ни и Коважного [111]. Явные разностные схемы не требуют применения итераций, однако они, как известно, обладают существенным недостатком: устойчивость схемы зависит от выбора шага интегрирования в продольном направлении.

Этот недостаток устранен в неявных разностных схемах. Наиболее детальное описание неявного конечно-разностного метода интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя применительно к течениям очень широкого класса содержится, как отмечалось выше, в работе Патанкара и Сполдинга [34]. Исходные уравнения в этой работе записаны в модифицированных переменных Мизеса. Все уравнения представлены в виде обобщенного уравнения вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + d.$$

Подробно проанализированы отдельные элементы конечно-разностного метода, в частности составление разностных уравнений (второй порядок аппроксимации по обеим координатам), описание граничных условий, решение результирующих алгебраических уравнений. Приведена достаточно универсальная программа численного метода на языке Фортран-IV. В непосредственной близости от стенки профиль скорости задавался в виде закона стенки, поскольку использование переменных Мизеса не обеспечивает достаточной точности решения при $y \rightarrow 0$.

Несколько иная, чем в [34], неявная двухслойная разностная схема с весами рассмотрена в монографии К.К. Федяевского, А.С. Гиневского, А.В. Колесникова [30]. Исходные уравнения в этой работе записывались в физических переменных применительно к течениям несжимаемой жидкости.

Неявная шеститочечная схема с весами, имеющая второй порядок аппроксимации была применена для интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости в работе Ю.Е. Карякина, В.Г. Шарова [112]. Та же схема была использована в работе Ю.Е. Карякина, Ю.В. Лапина [113] для численного интегрирования системы уравнений турбулентного пограничного слоя в равновесно диссоциирующем воздухе. Исходные уравнения записывались в переменных Дородницына - Лиза.

Некоторые модификации метода Патанкара - Сполдинга [34] предложены в работе В.К. Баева, В.И. Головичева, В.А. Ясакова [114] применительно к расчету свободных турбулентных неравновесных течений реагирующих газов. Наряду с подробным описанием конечно-разностного метода приводится программа на языке Фортран.

Конечно-разностная схема типа Кранка - Николсона с неравномерной сеткой второго порядка точности приводится в работе Блотнера [115].

В работе Келлера и Себеси [116] предложена двухслойная неявная схема с аппроксимацией производных центральными разностями. Система разностных уравнений первого порядка относительно приращений искомых функций представляется в матричном виде и решается методом векторной прогонки.

Из других работ, посвященных численным методам интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя, укажем на работы [23, 117]. В монографии Себеси, Смита [23] дано подробное описание неявного конечно-разностного метода с аппроксимациями третьего порядка точности по поперечной координате и первого по продольной (переменные Дородницына - Лиза). Метод получил известное распространение за рубежом. Конечно-разностный метод повышенного порядка точности развит в работе В.Н. Игнатьева [118]. В работах [101, 102, 119] применительно к различным типам турбулентных пристенных течений использован метод повышенной (четвертой) степени точности, являющийся обобщением известного метода И.В. Петухова [104].

§ 14. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРЕНИЯ НА ГЛАДКОЙ ПЛАСТИНЕ [120]

14.1. Общие замечания. Главное, принципиальное отличие интегральных методов от методов, основанных на непосредственном интегрировании уравнений турбулентного пограничного слоя (для краткости назовем их численными), заключается в том, что теорема импульсов в первом случае удовлетворяется для всего пограничного слоя в целом, во втором, — в каждой точке пограничного слоя в отдельности и, естественно, в целом. Отказ от необходимости удовлетворения теоремы импульсов локально (т.е. в каждой точке пограничного слоя отдельно) открывает широкие возможности для выбора семейств профилей скорости (температуры, энтальпии). Точность интегрального метода, естественно, в большой степени зависит от характера выбранных конкурирующих функций. Сам выбор семейств профилей скорости (температуры, энтальпии) может быть осуществлен на основе либо анализа опытных данных, либо рациональных соображений, а иногда на основе интуитивного подхода.

Как показывает обширный опыт построения интегральных методов, накопленный за более чем сорокалетнюю историю развития этих методов, при их построении целесообразно по возможности четко очертить рамки применимости метода, в частности, должно быть ясно, для расчета каких течений метод предназначен: равновесных (слабо неравновесных) или сильно неравновесных (в смысле Клаузера). Упомянутый уже опыт построения интегральных методов в несжимаемой жидкости и в газовых потоках достаточно убедительно свидетельствует, что для расчета слабо неравновесных пограничных слоев, т.е. слоев, в которых влияние предыстории потока невелико (параметры на границах слоя меняются мало), во многих случаях можно удовлетвориться выбором семейств профилей, зависящих от одного параметра (однопараметрические методы). Для расчетов сильно неравновесных течений, в частности течений в предотрывной области, однопараметрические методы, как правило, мало пригодны. Нетривиальным является вопрос о виде самих параметров формы профилей (формпараметров).

К настоящему времени наибольшего развития достигли однопараметрические методы расчета. Обзор однопараметрических методов расчета турбулентного пограничного слоя в газовых потоках, разработанных до 1967 г., можно найти в первом издании настоящей монографии [35]. В последующие годы число публикаций, посвященных этим методам, резко сократилось, что было связано с возрастающим интересом к численным методам (см. § 13). Что касается теории двухпараметрических методов, то их разработка, по существу, только еще начинается. Можно ожидать, что с появлением эффективных двух- и многопараметрических методов различия между интегральными и численными методами будут становиться все менее ощутимыми и в конечном счете исчезнут совсем. Основанием для подобного утверждения служит развитие многопараметрического метода Л.Г. Лойцянского в теории ламинарных пограничных слоев [6, 26].

Двупараметрический метод расчета турбулентного пограничного слоя в газовых потоках будет изложен в § 19 настоящей главы.

14.2. Основания метода. Рассматриваемый ниже метод является однопараметрическим. В качестве формпараметра, характеризующего форму профиля скорости, используется локальный коэффициент поверхностного трения. В отличие от современной двухслойной схемы, согласно которой весь слой делится на область закона стенки и область закона следа, в методе использована классическая прандтлевская

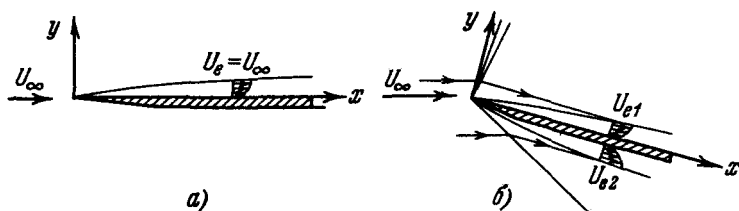


Рис. 22.

двухслойная схема. В соответствии с этой схемой весь слой делится на две дискретные области: вязкий подслой и турбулентное ядро.

В турбулентном ядре семейство профилей скорости находится с помощью классических полуэмпирических гипотез турбулентности Прандтля (2.133), (2.135) и Кармана (2.139) (весь процесс построения метода будет подробно описан с использованием формулы Кармана; конечный результат будет модифицирован с учетом применения формулы Прандтля).

Основанием для применения простой прандтлевской двухслойной схемы служит то обстоятельство, что течение на плоской пластине с постоянной температурой стенки являет собой пример слабо неравновесного в смысле Клаузера течения в пограничном слое. По существу, в рассматриваемом методе профиль скоростей, справедливый в области закона стенки, распространяется на весь слой, в том числе и на область закона следа. Подобный прием был в свое время с большим успехом применен Карманом к расчету трения на плоской пластине, обтекаемой несжимаемой жидкостью.

Важными свойствами получаемого в рамках принятой модели решения являются простота конечной формулы для коэффициента трения, возможность отчетливо выявить влияние определяющих параметров задачи (числа Рейнольдса, числа Маха и температурного фактора) на трение и, что особенно важно, универсальность полученного результата, проявляющаяся в широкой возможности обобщения его на гораздо более сложные по характеру течения (течения диссоциирующего газа, течения с вдувом и химическими реакциями в пограничном слое и т.д.). Отмеченные свойства рассматриваемого метода имеют смысл лишь в том случае, если метод достаточно точен. Как будет показано ниже в результате сопоставления расчетных и опытных данных, полученных в сверхзвуковых потоках газа при наличии теплообмена между газом и стенкой, по точности этот

метод можно с полным основанием отнести к числу наиболее точных интегральных методов расчета.

14.3. Процедура построения метода. Рассмотрим обтекание гладкой непроницаемой пластины сверхзвуковым потоком газа (рис. 22). Если пластина расположена под нулевым углом атаки (рис. 22, а), то скорость на внешней границе пограничного слоя будет постоянна и равна скорости набегающего потока на бесконечности $U_e = U_\infty$. При обтекании пластины под углом атаки (или клина) с присоединенным скачком на нижней поверхности и веером волн разрежения на верхней поверхности (рис. 20, б) скорость на внешней границе пограничного слоя также будет постоянна и равна скорости за скачком или веером разрежения соответственно. Величина скорости за присоединенным косым скачком и веером волн разрежения может быть определена по известным газодинамическим соотношениям [6, 126].

При больших сверхзвуковых скоростях может оказаться необходимым учет взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком. Вследствие этого взаимодействия величина давления, а следовательно, и скорость на внешней границе пограничного слоя могут заметно отличаться от значений этих параметров на бесконечности. Подробно об этом см., например, [28, 121]. В настоящей главе учет вязкого взаимодействия не производится.

В рассматриваемом случае плоского течения с постоянной скоростью ($U_e = \text{const}$, $dU_e/dx = 0$) на непроницаемой стенке ($v_w = 0$) интегральное соотношение импульсов (2.117) принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_e U_e^2}. \quad (3.53)$$

Здесь δ^{**} — толщина потери импульса, выражаемая равенством (2.114). Параметры на внешней границе пограничного слоя, как и ранее, будем обозначать индексом "е", имея в виду, что только в частном случае обтекания плоской пластины под нулевым углом атаки эти параметры равны параметрам набегающего потока на бесконечности.

Вводя в рассмотрение числа Рейнольдса, построенные по толщине потери импульса

$$Re^{**} = \rho_e U_e \delta^{**} / \mu_e \quad (3.54)$$

и по текущей координате точки на пластине

$$Re_x = \rho_e U_e x / \mu_e, \quad (3.55)$$

запишем уравнение (3.53) в виде

$$d Re_x = (\rho_e / \rho_w) \zeta^2 d Re^{**}, \quad (3.56)$$

где ζ — параметр трения, выражающийся равенством

$$\zeta = U_e / v_*, \quad v_* = (\tau_w / \rho_w)^{1/2}. \quad (3.57)$$

Вводя также в рассмотрение местный коэффициент трения

$$c_f = 2 \tau_w / (\rho_e U_e^2), \quad (3.58)$$

выразим параметр ξ непосредственно через c_f

$$\xi = \left(\frac{2}{c_f} \frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^{1/2} \quad (3.59)$$

Перепишывая уравнение (3.56) в интегральной форме, получаем

$$Re_x = (\rho_e / \rho_w) \int_0^{Re^{**}} \xi^2 d Re^{**}. \quad (3.60)$$

Как следует из зависимости (3.60), для решения поставленной задачи необходимо найти связь между ξ и Re^{**} , т.е. установить "закон сопротивления". Для установления этого закона обратимся к выражению для толщины потери импульса (2.114), записав его через переменные закона стенки

$$\psi = u / v_*, \quad \eta = y v_* / \nu_w \quad (3.61)$$

в виде

$$\delta^{**} = \frac{\nu_w \xi^2}{U_e} \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_e} \frac{\psi}{\xi} \left(1 - \frac{\psi}{\xi} \right) \frac{d\eta}{d\xi} d \left(\frac{\psi}{\xi} \right). \quad (3.62)$$

Принимая во внимание равенство (3.54), а также соотношение

$$\psi / \xi = u / U_e = \bar{u}, \quad (3.63)$$

преобразуем (3.62) к виду

$$Re^{**} = \xi^2 \frac{\mu_w}{\mu_e} \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_w} \bar{u} (1 - \bar{u}) \frac{d\eta}{d\psi} d\bar{u}. \quad (3.64)$$

Для определения зависимости $\frac{d\eta}{d\psi}(\bar{u})$ в турбулентном ядре восполь-

зуемся формулой полуэмпирической теории Кармана (2.139). Относительно константы турбулентности κ в этой формуле будем предполагать, что она не зависит от сжимаемости (от числа Me) и теплообмена (от температурного фактора T_w / T_e) и имеет такое же числовое значение, как в несжимаемой жидкости, т.е. $\kappa = 0,4$.

Переходя в формуле Кармана (2.139) к переменным закона стенки (3.61), приведем ее к виду

$$\frac{\varphi''^2}{\varphi'^4} = \kappa^2 \frac{\rho/\rho_w}{\tau/\tau_w}, \quad (3.65)$$

где штрих означает производную по η .

Извлекая корень из обеих частей получившегося равенства, будем иметь

$$\psi''/\psi'^2 = -\kappa \Psi, \quad (3.66)$$

где

$$\Psi = \left(\frac{\rho/\rho_w}{\tau/\tau_w} \right)^{1/2}. \quad (3.67)$$

Знак минус в правой части равенства (3.66) выбран в связи с тем, что на пластине $\psi'' < 0$ (условие выпуклости профиля скоростей).

Меняя в (3.66) местами аргумент и функцию, получим уравнение

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} / \frac{d\eta}{d\varphi} = \kappa \Psi, \quad (3.68)$$

первым интегралом которого является равенство

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = c_1 \exp \left(\kappa \int \Psi d\bar{u} \right). \quad (3.69)$$

Для определения константы интегрирования c_1 приходится задаваться значением производной $d\eta/d\varphi$ на границе вязкого подслоя со стороны турбулентного ядра. Проследившим допущением здесь является требование о том, чтобы эта величина $d\eta/d\varphi$ имела то же зна-

чение, что и в несжимаемой жидкости, т.е. $\left. \frac{d\eta}{d\varphi} \right|_{\eta_x+0} = \frac{1}{f} = \kappa \alpha$

иными словами, допускается, что $\frac{d\eta}{d\varphi}(\eta_x + 0)$ не зависит от сжи-

маемости и теплообмена (α — эмпирическая константа вязкого подслоя, η_x — координата границы вязкого подслоя). Принятое допущение приводит к следующему результату:

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{1}{f} \exp \left(\kappa \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} \Psi d\bar{u} \right). \quad (3.70)$$

Здесь $\bar{u}_x = u_x / U_e$ — безразмерная скорость на границе вязкого подслоя (определение этой величины будет дано позднее).

Производя в (3.70) интегрирование и определяя постоянную интегрирования из условия на границе вязкого подслоя ($\bar{u} = \bar{u}_x$ при $\eta = \eta_x$), получим выражение для профиля скоростей в турбулентном ядре

$$\eta = \eta_x + \frac{\bar{u}}{\xi} \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} \exp\left(\pi \xi \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} \Psi d\bar{u}\right) d\bar{u}. \quad (3.71)$$

Здесь Ψ выражается равенством (3.67).

Как следует из выражения (3.71), принятый в рассматриваемом методе профиль скоростей является однопараметрическим. Роль формпараметра семейства профилей скорости играет параметр трения ξ , однозначно связанный с местным коэффициентом трения c_f равенством (3.59).

Равенство (3.71), таким образом, является обобщенным выражением закона стенки для случая течения сжимаемой жидкости.

Приближенный характер излагаемого метода в большой степени определяется тем, что принятый в методе профиль скоростей (закон стенки), справедливый лишь в пристеночной области (области закона стенки), распространяется и на область закона следа.

Остается решить вопрос о вязком подслое. В этой области, как известно из опытов [35], при сверхзвуковых скоростях профиль скоростей, так же как в несжимаемой жидкости, оказывается линейным (см. § 10):

$$\psi = \eta. \quad (3.72)$$

Безразмерная скорость на границе подслоя, как следует из (3.72), равна ¹

$$\bar{u}_x = \frac{\psi_x}{\xi} = \frac{\eta_x}{\xi} = \frac{\alpha}{\xi}. \quad (3.73)$$

Таким образом, входящая в выражение (3.64) производная $d\eta/d\psi$ в вязком подслое равна единице, т.е.

$$d\eta/d\psi = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_x. \quad (3.74)$$

Возвращаясь к выражению для Re^{**} (3.64), заметим, что при вычислении интеграла в правой части этого равенства интервал

¹

Подробное рассмотрение вопросов об определении толщины вязкого подслоя и влиянии различных факторов на параметры подслоя было дано в § 11 первого издания настоящей монографии [35].

интегрирования, строго говоря, следовало бы разбить на два участка — вязкий подслей ($0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi$) и турбулентное ядро ($\bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1$) и в каждом из них подставить свое значение $d\eta/d\psi$, используя выражение (3.70) на первом участке и (3.74) — на втором. Однако такие вычисления, приводящие к довольно сложному выражению для Re^{**} , не являются необходимыми в тех случаях, когда относительная толщина вязкого подслоя не очень велика. Максимальное значение чисел Маха, при котором справедлив подход, принятый в настоящей главе, как это отмечалось во введении к ней (§ 12), не превышает шести-семи. Как следует из рис. 7, при таких числах Маха относительная толщина вязкого подслоя не превышает 5% от толщины всего слоя. В этом случае можно опустить первый участок, продолжив второй до стенки. Вычисления показывают, что при больших значениях параметра трения ζ ошибка от такого приближения оказывается незначительной. Следуя указанному пути, подставим выражение для $\dot{\eta}$ (3.70) в (3.64); в результате получим следующее выражение для числа Рейнольдса Re^{**} :

$$Re^{**} = \frac{\mu_w}{\mu_e} \frac{\zeta^2}{f} \int_0^1 \Phi(\bar{u}) \exp \left[\kappa \zeta \int_{\bar{u}_\pi}^{\bar{u}} \Psi(\bar{u}) d\bar{u} \right] d\bar{u}. \quad (3.75)$$

Здесь введено обозначение

$$\Phi(\kappa, \bar{u}) = (\rho/\rho_w) \bar{u} (1 - \bar{u}). \quad (3.76)$$

Для дальнейшего удобно записать (3.75) в виде

$$Re^{**} = \exp[-\kappa \zeta I(\bar{u}_\pi)] \frac{\mu_w}{\mu_e} \frac{\zeta^2}{f} \int_0^1 \Phi(\bar{u}) \exp[\kappa \zeta I(\bar{u})] d\bar{u}, \quad (3.77)$$

где

$$I(\bar{u}) = \int_0^{\bar{u}} \Psi(\bar{u}) d\bar{u} = \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{\rho/\rho_w}{\tau/\tau_w} \right)^{1/2} d\bar{u}, \quad (3.77a)$$

$$I(\bar{u}_\pi) = \int_0^{\bar{u}_\pi} \Psi(\bar{u}) d\bar{u} = \int_0^{\bar{u}_\pi} \left(\frac{\rho/\rho_w}{\tau/\tau_w} \right)^{1/2} d\bar{u}. \quad (3.77b)$$

Равенство (3.77) является интегральным выражением обобщенного закона сопротивления для плоской пластины, обтекаемой газовым потоком. Этот "закон" связывает местный коэффициент трения (ζ_x) с числом Рейнольдса, построенным по толщине потери импульса (Re^{**}), при произвольных зависимостях безразмерных плотности

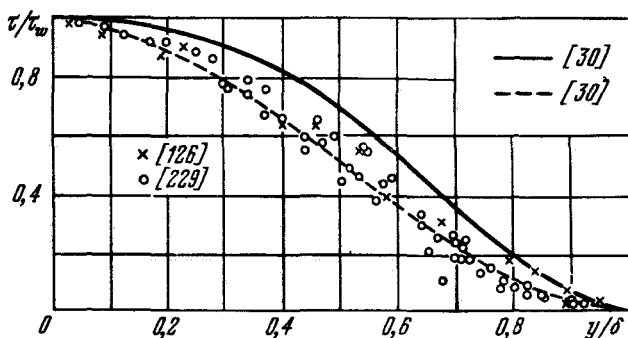


Рис. 23.

(ρ/ρ_w) и напряжения трения (τ/τ_w) от безразмерной скорости ($\bar{u}$). "Произвольность" указанных зависимостей придает этому закону сопротивления достаточно универсальный характер, что позволяет в дальнейшем обобщить полученное решение на более сложные течения диссоциирующего газа, химически реагирующего газа с вдувом и т.д.

На этом этапе несколько ограничим "универсальность" закона сопротивления (3.77), приняв допущение о постоянстве напряжения трения τ поперек пограничного слоя и равенстве его напряжению трения на стенке

$$\tau = \text{const} = \tau_w. \quad (3.78)$$

Это ограничение диктуется лишь условиями рассматриваемой задачи об обтекании непроницаемой пластины газовым потоком. Вблизи поверхности такой пластины всегда есть область, в которой условие (3.78) выполняется строго. Это следует из уравнения движения (3.2), согласно которому $\partial\tau/\partial y \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. Эта область относительно невелика.

Сказанное подтверждается приведенными на рис. 23 опытными данными Клебанова [126] (крестики), полученными путем прямых термоанемометрических измерений величины $\overline{u'v'}$ в несжимаемом турбулентном пограничном слое гладкой плоской пластины, а также данными работы [229] (кружки), в которой распределение τ/τ_w получено расчетом по экспериментальным профилям скорости для тех же условий, что и в [126]. Для суждения о характере распределения τ/τ_w в слое на пластине на рис. 23 приведены полиномиальные представления этого распределения, заимствованные из монографии [30]. Сплошной и штриховой кривыми изображены распределения

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - 4 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^4, \quad \frac{\tau}{\tau_w} = 1 - 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (3.79)$$

соответственно, где δ — толщина пограничного слоя.

Как видно из приведенных на рис. 23 данных, область $\tau = \text{const} = \tau_w$ действительно относительно невелика.

Тем не менее допущение (3.78) не вносит по сравнению с (3.79) заметной погрешности в расчет интегральных характеристик пограничного слоя (трения, толщины вытеснения, толщины потери импульса и т.д.). Этот факт становится понятным, если рассмотреть выражение (3.77). Заметим, что в этом выражении величиной, зависящей от распределения касательных напряжений поперек пограничного слоя, является величина $I(\bar{u})$. Наибольшая погрешность, вносимая в нее допущением (3.78), будет, очевидно, иметь место вблизи внешней границы пограничного слоя, где, согласно (3.78), $\tau = \tau_w$, в то время

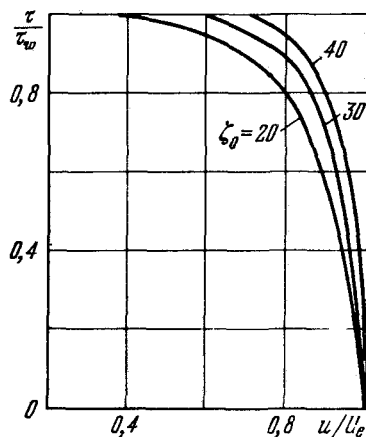


Рис. 24.

как в действительности $\tau \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Но в этом случае величина, содержащая $I(\bar{u})$, умножается на малую величину $(1 - \bar{u})$ — малую, так как $\bar{u} \rightarrow 1$ при $y \rightarrow \infty$, что и приводит в конечном счете к небольшой погрешности в величине Re^{**} . С другой стороны, как будет показано в дальнейшем, коэффициент трения на стенке $c_f \sim (\ln Re^{**})^2$. Это обстоятельство тоже способствует уменьшению погрешности, вносимой в расчет допущением (3.78).

Для обоснования допущения (3.78) можно привести также следующие простые соображения. Используя обычный логарифмический профиль скоростей [6]

$$\psi = 2,5 \ln \eta + 5,5, \quad (3.80)$$

нетрудно из равенства (3.79) получить следующую зависимость напряжения трения в пограничном слое от скорости:

$$\tau/\tau_w = 1 - \exp[-\kappa \xi_0 (1 - \bar{u})], \quad \xi_0 = U_e/v_* = (2/c_{f0})^{1/2} \quad (3.81)$$

Результаты расчета по формуле (3.81) для трех значений параметра трения $\xi_0 = 20, 30, 40$ представлены на рис. 24. Как видно из рис. 24, например, для значения параметра $\xi_0 = 30$ (это соответствует числу Рейнольдса $\sim 10^7$) в интервале изменения скорости $0 \leq \bar{u} \leq 0,8$ напряжение трения меняется в пределах $0,9 \leq \tau/\tau_w \leq 1$, что оправдывает использование (3.78) в практических расчетах.

Возвращаясь к равенству (3.77a), будем иметь при принятом допущении (3.78)

$$I(\bar{u}) = \int_0^{\bar{u}} (\rho/\rho_w)^{1/2} d\bar{u} \quad (3.82)$$

При определении $I(\bar{u}_x)$ будем приближенно полагать плотность в вязком подслое постоянной величиной, равной плотности на стенке ρ_w . В этом случае, принимая во внимание (3.78), найдем

$$I(\bar{u}_x) = \bar{u}_x = \alpha / \tau. \quad (3.83)$$

Для вычисления интеграла, входящего в выражение (3.77), воспользуемся тем обстоятельством, что величина τ существенно превосходит единицу ($\tau \gg 1$). В этом случае интеграл может быть представлен в виде асимптотического ряда, получающегося как результат интегрирования по частям

$$\int \Phi(\bar{u}) \exp[\tau \tau I(\bar{u})] d\bar{u} = \frac{\exp[\tau \tau I(\bar{u})]}{\tau \tau \Psi} \left(\Phi - \frac{F_1}{\tau} + \frac{F_2}{\tau^2} - \frac{F_3}{\tau^3} + \dots \right), \quad (3.84)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= (\rho/\rho_w)^{1/2}, \quad F_1 = \frac{1}{\Psi} \left(\Phi' - \frac{\Phi \Psi'}{\Psi} \right), \\ F_2 &= \frac{1}{\Psi^2} \left(\Phi'' - \frac{\Phi \Psi'' + 3\Phi' \Psi'}{\Psi} + \frac{3\Phi \Psi'^2}{\Psi^2} \right), \\ F_3 &= \frac{1}{\Psi^3} \left(\Phi''' - \frac{6\Phi'' \Psi' + 4\Phi' \Psi'' + \Phi \Psi'''}{\Psi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15\Phi' \Psi'^2 + 10\Phi \Psi' \Psi''}{\Psi^2} - \frac{15\Phi \Psi'^3}{\Psi^3} \right), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.85)$$

Здесь штрих означает производную по $\bar{u}$.

Определим значения функций $\Phi(\bar{u})$ и $\Psi(\bar{u})$ и их производных при $\bar{u} = 1$:

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= 0, \quad \Phi'(1) = -\rho_e/\rho_w, \quad \Phi''(1) = -2(\rho_e/\rho_w) - 2(\rho/\rho_w)', \\ \Psi(1) &= (\rho_e/\rho_w)^{1/2}, \quad \Psi'(1) = \frac{1}{2}(\rho/\rho_w)'_e (\rho_e/\rho_w)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Необходимости в вычислении значений функций Φ и Ψ и их производных при $\bar{u} = 0$ не возникает, так как заранее очевидно, что вклад ряда (3.84) при $\bar{u} = 0$ в значение интеграла несоизмеримо меньше вклада того же ряда при $\bar{u} = 1$ вследствие наличия во втором случае большого экспоненциального множителя. Принимая во внимание равенства (3.82), (3.83), (3.85) и (3.86), вычислим с помощью соотношения (3.84) входящий в правую часть (3.77) определенный интеграл. Ограничиваясь учетом членов, со-

державших $\mathcal{R}^3 \varpi^3$ в знаменателе, получим следующее выражение для Re^{**} :

$$Re^{**} = \frac{e^{-\mathcal{R} \varpi}}{f \mathcal{R}^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp \left[\mathcal{R} \varpi \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} d\bar{u} \right] \left[1 - \frac{2 + \frac{1}{2} (\rho_w / \rho_e) (\rho / \rho_w)'_e}{\mathcal{R} \varpi (\rho_e / \rho_w)^{1/2}} \right]. \quad (3.87)$$

Введем в рассмотрение число Рейнольдса, построенное по толщине вытеснения δ^*

$$Re^* = \rho_e U_e \delta^* / \mu_e, \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \right) d\eta. \quad (3.88)$$

Следуя тем же путем, что и при определении Re^{**} , найдем

$$Re^* = \frac{e^{-\mathcal{R} \varpi}}{f \mathcal{R}^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp \left[\mathcal{R} \varpi \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} d\bar{u} \right] \left[1 + (\rho / \rho_w)'_e (\rho_e / \rho_w)^{-1} - \frac{1}{\mathcal{R} \varpi} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-3/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)'_e + \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)''_e - \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)'_e^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1} \right] \right]. \quad (3.89)$$

Составив отношение Re^* / Re^{**} , получим выражение для параметра $H^* = \delta^* / \delta^{**}$:

$$H^* = \left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)'_e \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1} - \frac{1}{\mathcal{R} \varpi} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-3/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)'_e + \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)''_e - \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)'_e^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1} \right] \right] \left[1 - \frac{1}{\mathcal{R} \varpi} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^{-1/2} \left[2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)'_e \right] \right]^{-1}. \quad (3.90)$$

Выражение (3.87), связывающее число Рейнольдса Re^{**} (3.84) с параметром трения ϖ (3.57), является законом сопротивления. Важно подчеркнуть, что этот закон получен без каких-либо допущений о характере изменения плотности в пограничном слое и может быть использован для решения задач о течениях на непроницаемой поверхности при произвольном изменении плотности в пограничном слое.

Переходя к установлению необходимой для дальнейшего связи между плотностью и скоростью, заметим, что из уравнения состояния и условия постоянства давления поперек пограничного слоя вытекает следующее простое соотношение между плотностью и температурой

$$\rho / \rho_w = (T / T_w)^{-1}. \quad (3.91)$$

В наиболее простой форме связь между температурой и скоростью

в пограничном слое получается в предположении, что число Прандтля Pr и его турбулентный аналог Pr_T равны единице, а удельная теплоемкость газа постоянна. В этом случае, как было показано в предыдущем параграфе, имеет место интеграл уравнения энергии — интеграл Крокко (3.45).

Используя равенства (3.91) и (3.45), найдем искомую связь между плотностью и скоростью в пограничном слое

$$\rho/\rho_w = (1 - \omega \bar{u} - \beta \bar{u}^2)^{-1}. \quad (3.92)$$

Подставив соотношение (3.92) в (3.82) и производя последующее интегрирование, найдем необходимое для дальнейшего выражение функции $I(\bar{u})$

$$I(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} \bar{u} + \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} \right). \quad (3.93)$$

Замечая далее, что функция $I(\bar{u})$ входит в показатель экспоненты в равенствах (3.87) и (3.89) и производя необходимые вычисления в правых частях этих равенств с учетом (2.60), найдем следующие выражения для Re^{**} и Re^* :

$$Re^{**} = \frac{e^{-\pi \alpha}}{i \pi^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp[\pi \zeta I(1)] \left[1 - \frac{2 - 1,5\omega - \beta}{\pi \zeta \sqrt{1 - \omega - \beta}} \right], \quad (3.94)$$

$$Re^* = \frac{e^{-\pi \alpha}}{i \pi^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp[\pi \zeta I(1)] \left[\frac{1 + \beta}{1 - \omega - \beta} \right] \left[1 - \frac{\beta(3 - 1,5\omega - \beta + \frac{\omega}{2\beta})}{\pi \zeta (1 + \beta) \sqrt{1 - \omega - \beta}} \right]. \quad (3.95)$$

Здесь

$$I(1) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} + \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} \right). \quad (3.96)$$

Составляя отношение равенств (3.87) и (3.89), найдем выражение для формпараметра $H^* = \delta^*/\delta^{**}$

$$H^* = \frac{(1 + \beta) \left[1 - \frac{\beta(3 - 1,5\omega - \beta + \frac{\omega}{2\beta})}{\pi \zeta (1 + \beta) \sqrt{1 - \omega - \beta}} \right]}{(1 - \omega - \beta) \left(1 - \frac{2 - 1,5\omega - \beta}{\pi \zeta \sqrt{1 - \omega - \beta}} \right)}. \quad (3.97)$$

В предельном случае течения несжимаемого газа ($\beta = 0$) и отсутствия теплопередачи ($\omega = 0$) получим выражение

$$N_0^* = \left(1 - \frac{2}{\pi \xi_0}\right)^{-1}, \quad (3.98)$$

которое при числах Рейнольдса $10^5 \div 10^7$ дает значения

$$N_0^* = 1,36 \div 1,23, \text{ хорошо согласующиеся с опытом.}$$

Имея закон сопротивления (3.94), нетрудно, используя уравнение импульсов в форме (3.60), установить искомую связь между коэффициентом трения c_f и числом Рейнольдса Re_x (3.55), построенным по текущей координате точки на пластине. При установлении этой связи целесообразно принять для Re^{**} более грубое приближение, пренебрегая вторым членом в правой части равенства (3.94) по сравнению с единицей. Такое приближение позволит существенно упростить конечную формулу для коэффициента трения c_f . Погрешность же, вносимая при этом в формулу для Re^{**} , может быть в значительной степени скомпенсирована соответствующим выбором постоянной интегрирования¹. Подставив таким образом "огрубленное" выражение для Re^{**} в равенство (3.60) и производя интегрирование при граничном условии $Re_x = 0$ при $\xi = 0$ (условие того, что турбулентный пограничный слой начинается от передней кромки пластины), получим в принятом приближении

$$c_1 \frac{e^{-\pi \alpha}}{f \pi^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \frac{\rho_e}{\rho_w} \pi^2 \exp[\pi \xi I(1)] = Re_x. \quad (3.99)$$

Постоянная c_1 введена в (3.99) для "компенсации" приближения, принятого для Re^{**} .

Переходя в формуле (3.99) от ξ к c_f по (3.59), используя соотношение (3.92) и логарифмируя, будем иметь

$$\pi (\lg e) \sqrt{2 - \sqrt{1 - \omega - \beta}} I(1) (c_f)^{-1/2} = 2 \lg(Re_x c_f) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right) + c_2, \quad (3.100)$$

где $I(1)$ выражается равенством (3.93), а

$$c_2 = -\lg [c_1 2 e^{\pi \alpha} / (f \pi^2)].$$

¹

Напомним, что подобный прием использовался при выводе формулы Кармана для коэффициента трения на плоской пластине в несжимаемой жидкости. См., например, [127].

Полагая в (3.100) $\kappa = 0,4$ и определяя постоянную c_2 из условия, чтобы при $\omega = \beta = 0$ формула (3.100) переходила в формулу Кармана для несжимаемой жидкости

$$\frac{0,242}{\sqrt{c_{f_0}}} = 0,41 + \lg(Re_x c_{f_0}), \quad (3.101)$$

получим следующее выражение для локального коэффициента поверхностного трения плоской пластины в сжимаемом газе:

$$\begin{aligned} \frac{0,242 \sqrt{1-\omega-\beta}}{\sqrt{\beta c_f}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta + \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} \right) = \\ = 0,41 + \lg(Re_x c_f) - \lg(\mu_w / \mu_e). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Для расчета динамической вязкости газа можно воспользоваться степенным законом

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e} \right)^n, \quad (3.103)$$

где показатель степени n принимается обычно равным 0,76.

Перейдем теперь к определению среднего коэффициента поверхностного трения

$$c_F = \frac{1}{Re_x} \int_0^{Re_x} c_f dRe_x. \quad (3.104)$$

Для этого воспользуемся интегральным соотношением импульсов в форме (3.56), преобразовав его предварительно к виду

$$\frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{1}{\xi^2} dRe_x = dRe^{**}. \quad (3.105)$$

Переходя в левой части уравнения (3.105) от ξ к c_f с помощью соотношения (3.59) и производя последующее интегрирование при условии $Re^{**} = 0$ при $Re_x = 0$, с учетом равенства (3.104) получим

$$c_F Re_x = 2 Re^{**}. \quad (3.105a)$$

Подставляя в правую часть формулы (3.105а) "огрубленное" выражение Re^{**} (3.94), будем иметь

$$c_F Re_x = c_3 \frac{2e^{-\alpha x}}{x^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp[\alpha \xi I(1)]. \quad (3.106)$$

Постоянная c_3 введена, так же как в соотношении (3.99), для "компенсации" принятого здесь "огрубления" в выражении Re^{**} .

Сравнивая равенство (3.106) с равенством (3.99), преобразованным к виду

$$c_f Re_x = c_1 \frac{2e^{-\alpha x}}{x^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp[\alpha \xi I(1)],$$

нетрудно заметить, что при рассматриваемых здесь больших значениях параметра ξ , коэффициенты c_F и c_f отличаются на постоянную величину. Следовательно, можно заключить, что выражение для среднего коэффициента трения имеет вид (3.102), но с другой постоянной, т.е.

$$\frac{0,242 \sqrt{1-\omega-\beta} I(1)}{\sqrt{\beta} c_F} = \lg(Re_x c_F) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right) + c_4. \quad (3.107)$$

Постоянную c_4 определим, потребовав чтобы при $\omega = \beta = 0$ соотношение (3.107) приводилось к кармановскому закону для среднего коэффициента поверхностного трения в несжимаемой жидкости, а именно

$$\frac{0,242}{\sqrt{c_{F0}}} = \lg(Re_x c_{F0}). \quad (3.108)$$

После определения постоянной c_4 получим следующую окончательную формулу для среднего коэффициента поверхностного трения:

$$\begin{aligned} \frac{0,242 \sqrt{1-\omega-\beta}}{\sqrt{\beta} c_F} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} + \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} \right) = \\ = \lg(Re_x c_F) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Рассмотрим два имеющих практическое значение частных случая обтекания плоской пластины.

Теплоизолированная пластина. В этом случае $T_w = T_{0e}$, $\omega = 0$,

$$\beta = \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \left/ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \right. \text{ при } Pr = Pr_T = 1. \quad (3.110)$$

Формулы (3.102) для местного коэффициента трения и (3.109) для среднего коэффициента трения преобразуются соответственно к виду

$$\frac{0,242}{\sqrt{c_f}} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \arcsin \sqrt{\beta} = 0,41 + \lg(Re_x c_f) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right) \quad (3.111)$$

и

$$\frac{0,242}{\sqrt{c_{F0}}} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \arcsin \sqrt{\beta} = \lg(Re_x c_F) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right). \quad (3.112)$$

Пластина с теплообменом в потоке несжимаемой жидкости. В этом случае, устремляя величину β к нулю, будем иметь

$$\frac{0,484(\sqrt{1-\omega} + \omega - 1)}{\sqrt{c_f} \omega} = 0,41 + \lg(Re_x c_f) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right), \quad (3.113)$$

$$\frac{0,484(\sqrt{1-\omega} + \omega - 1)}{\sqrt{c_F} \omega} = \lg(Re_x c_F) - \lg\left(\frac{\mu_w}{\mu_e}\right) \quad (3.114)$$

Полученные в неявной форме зависимости коэффициентов трения от параметров набегающего потока и условий на стенке не всегда удобны для практического употребления. Нетрудно показать путем простых преобразований, что указанные зависимости можно сделать явными. Для этого обратимся к равенству (3.99), которое в случае течения несжимаемой жидкости и отсутствия теплообмена между газом и стенкой приводится к виду

$$c_f \frac{e^{-\kappa \omega}}{\xi \kappa^2} \xi_0^2 e^{\kappa \xi_0} = Re_x. \quad (3.115)$$

Разделив обе части равенства (3.99) соответственно на обе части равенства (3.115), будем иметь

$$(\xi/\xi_0)^2 \exp[\kappa \xi(1 - \kappa \xi_0)] = \mu_e \rho_w / (\mu_w \rho_e). \quad (3.116)$$

Переходя в выражении (3.116) от ξ к c_f с помощью соотношения (3.59) и логарифмируя, получим

$$-\lg \frac{c_f}{c_{f0}} + \frac{FK}{\sqrt{\frac{c_f}{c_{f0}}}} = F + G, \quad (3.117)$$

где

$$F = \frac{0,242}{\sqrt{c_{f0}}}, \quad (3.118)$$

$$G = 1g \left(\frac{\mu_e}{\mu_w} \right), \quad (3.119)$$

$$K = \sqrt{\frac{1-\omega-\beta}{\beta}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} + \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4\beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4\beta}}} \right). \quad (3.120)$$

Для определения коэффициента трения c_{f0} можно воспользоваться либо формулой Кармана (3.101), либо более простыми явными зависимостями [6, 129]

$$c_{f0} = 0,0263 Re_x^{-1/7}, \quad c_{f0} = 0,085 Re_x^{-0,29+0,011g Re_x}. \quad (3.121)$$

Уравнение (3.117) можно свести к трансцендентному уравнению с одним параметром. Для этого перепишем это уравнение в виде

$$2 \lg \frac{1}{\sqrt{c_f/c_{f0}}} + \frac{FK}{\sqrt{c_f/c_{f0}}} = F + G$$

и затем добавим к обеим частям полученного равенства по $2 \lg \frac{FK}{2}$; тогда получим

$$1g \frac{FK}{2\sqrt{c_f/c_{f0}}} + \frac{FK}{2\sqrt{c_f/c_{f0}}} = 1g \frac{FK}{2} + \frac{F+G}{2}. \quad (3.122)$$

Вводя обозначения

$$N = \frac{FK}{2\sqrt{c_f/c_{f0}}}, \quad (3.123)$$

$$Q = 1g \frac{FK}{2} + \frac{F+G}{2}, \quad (3.124)$$

будем иметь вместо соотношения (3.122) следующее уравнение: (3.125)

$$1g N + N = Q.$$

Таким образом, выражение для коэффициента трения может быть записано в виде

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \left(\frac{FK}{2N} \right)^2, \quad (3.126)$$

где значения F и K определяются из равенств (3.118) и

(3.120), а величина N находится из решения уравнения (3.125). Определение величины N не составляет большого труда и может быть легко выполнено при помощи таблиц десятичных логарифмов или графически.

Если для динамической вязкости принять степенной закон (3.103), то выражение для функции G , которая наряду с F и K определяет N , принимает вид

$$G = n \lg \frac{T_e}{T_w}. \quad (3.127)$$

Не останавливаясь на деталях, отметим, что при использовании формулы Прандтля ((2.133), (2.135)) для турбулентных напряжений вместо формулы Кармана (2.139), для коэффициента трения получается то же выражение (3.126) с тем отличием, что функция G вместо (3.119) выражается равенством

$$G = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lg \frac{T_e}{T_w}. \quad (3.128)$$

Рассматривая формулу (3.126), можно заметить, что при больших числах Рейнольдса величина отношения c_f / c_{f0} слабо зависит от числа Рейнольдса. Действительно, устремляя число Рейнольдса к бесконечности ($Re_x \rightarrow \infty$, или, что то же самое, $F \rightarrow \infty$), получим следующую предельную формулу для отношения c_f / c_{f0} :

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = K^2. \quad (3.129)$$

Величина K , выражаемая равенством (3.120), зависит только от сжимаемости среды (β) и теплопередачи (ω) и не зависит от числа Рейнольдса.

Факт существования предельной формулы (3.129) был установлен и затем широко использован для построения полуэмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя в работах С.С. Кутателадзе, А.И. Леонтьева и др. [31, 129, 130].

При использовании для расчета коэффициента трения формулы (3.129), так же как и ранее, полезно рассмотреть частные случаи.

В случае теплоизолированной пластины ($\omega = 0$) коэффициент β выражается равенствами (3.110), а определяющая функция K будет иметь вид

$$K = \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \operatorname{arcsin} \sqrt{\beta}. \quad (3.130)$$

В несжимаемой жидкости при наличии теплопередачи, устремляя величину β к нулю, получим

$$K = 2(\sqrt{1-\omega} + \omega - 1)/\omega. \quad (3.131)$$

Для расчета среднего коэффициента трения плоской пластины нетрудно установить справедливость формулы, совпадающей по виду с формулой (3.126), а именно

$$\frac{c_F}{c_{F0}} = \left(\frac{FK}{2N} \right)^2, \quad (3.132)$$

где K и N выражаются, как и ранее, равенствами (3.120) и (3.125), а величина F имеет вид

$$F = \frac{0,242}{\sqrt{c_{F0}}}. \quad (3.133)$$

Для определения коэффициента трения c_{F0} можно воспользоваться либо формулой Кармана (3.108), либо более простой степенной зависимостью [6]

$$c_{F0} = 0,0307 Re_x^{-1/7}. \quad (3.134)$$

Полученные выше формулы (3.126) и (3.132) позволяют рассчитывать отношения местного и среднего коэффициентов трения при заданных значениях числа Маха M_e , температурного фактора T_w/T_{e0} и числа Рейнольдса Re_x к местному и среднему коэффициентам трения в несжимаемой жидкости ($M_e = 0$, $T_w/T_e = 1$) при том же значении числа Рейнольдса Re_x . Однако в некоторых случаях, в частности при обработке экспериментальных данных в качестве характерного числа Рейнольдса более удобным оказывается использование числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса Re^{**} . Это целесообразно, например, в тех случаях, когда трудно определить начало пограничного слоя на стенке трубы и, следовательно, невозможно использовать число Рейнольдса Re_x , построенное по текущей координате. В этих случаях для сравнения теории с экспериментом полезно иметь отношения c_f/c_{f0} и c_F/c_{F0} , в которых величины c_f и c_{f0} , c_F и c_{F0} вычислены при одинаковых значениях числа Рейнольдса Re^{**} .

Для получения этих соотношений обратимся к выражению для числа Рейнольдса Re^{**} (3.94), которое в случае течения несжимаемой жидкости приводится к виду

$$Re^{**} = \frac{e^{-\kappa \kappa_0}}{f \kappa^2} e^{\kappa \tau_0} \left(1 - \frac{2}{\kappa \tau_0} \right).$$

Так же, как при установлении соотношений (3.126) и (3.132), примем для числа Рейнольдса Re^{**} более грубое приближение,

согласно которому будем пренебрегать в правых частях выражения (3.94) и последнего равенства членами, содержащими $1/\varphi$ ($1/\varphi_0$), по сравнению с единицей. Тогда, разделив, как и ранее, обе части равенства (3.94) соответственно на обе части предыдущего равенства и совершая затем переход от φ к c_f по соотношению (3.59), получим после простых преобразований

$$\left(\frac{c_f}{c_{f0}}\right)_{Re_{**}} = \left(\frac{KF}{F+G}\right)^2, \quad (3.135)$$

где функции F , K и G по-прежнему выражаются равенствами (3.118) – (3.120).

Выражение для $(c_f/c_{f0})_{Re_{**}}$ имеет такой же вид, как и (3.135), с тем отличием, что функция F в этом случае выражается равенством (3.133).

14.4. Последовательность расчета трения. Для читателя, интересующегося лишь практическими приложениями метода, приводим последовательность расчета трения в полностью турбулентном пограничном слое на плоской пластине в сверхзвуковом потоке с теплообменом между газом и стенкой.

I. Местный коэффициент трения c_f .

1. По заданным значениям числа Маха на внешней границе пограничного слоя (M_e) и температурного фактора (T_w/T_e) (T_w – температура стенки, T_e – температура на внешней границе пограничного слоя) по формулам (3.46) определяются параметры теплообмена (ω) и сжимаемости (β).

2. По известным значениям параметров ω и β по соотношению (3.120) находится функция K .

3. По заданному значению температурного фактора (T_w/T_e) по формуле (3.127) определяется функция G ($n = 0,76$).

4. По заданному числу Рейнольдса ($Re_x = U_e \rho_e x / \mu_e$) по одному из соотношений (3.121) вычисляется местный коэффициент трения пластины в несжимаемой жидкости (c_{f0}), а затем по известному значению c_{f0} по формуле (3.118) определяется функция F .

5. По известным значениям функций F , G , K по соотношению (3.124) находится величина Q , а затем из уравнения (3.125) определяется функция N .

6. По известным функциям F , K , N по соотношению (3.126) вычисляется местный коэффициент трения c_f .

II. Средний коэффициент трения c_F . Последовательность расчета среднего коэффициента трения c_F остается той же, что и местного коэффициента трения, с тем однако различием, что функция F определяется при заданном значении числа Рейнольдса Re_x по соотношениям (3.133), (3.134) (п.4), а сам средний коэффициент трения находится по формуле (3.132).

III. Местный и средний коэффициенты трения при заданном значении числа Рейнольдса $Re^{**} = \rho_e U_e \delta^{**} / \mu_e$ (δ^{**} - толщина пограничного импульса). Пункты 1, 2, 3 такие же, как при расчете местного коэффициента трения c_f (см. I).

4. По заданному числу Рейнольдса Re^{**} ($Re^{**} = \rho_e U_e \delta^{**} / \mu_e$) по формулам [6]

$$c_{f0} = 0,0131 Re^{** -1/6}, \quad c_{F0} = 0,0157 Re^{** -1/6} \quad (3.136)$$

определяются местный и средний коэффициенты трения; затем по известным c_{f0} и c_{F0} по формулам (3.118) и (3.133) находятся функции F , G .

5. По известным функциям F , G , K по соотношению (3.135) вычисляется местный коэффициент трения c_f при заданном Re^{**} .

При расчете среднего коэффициента можно воспользоваться равенством (3.135), заменив в его левой части c_f / c_{f0} на c_F / c_{F0} .

В заключение приведем упрощенный вариант результирующей формулы для расчета трения (3.126). Упрощение достигается заменой трансцендентного уравнения (3.124) более простым соотношением

$$N = 0,123 + 0,82 Q,$$

которое оказывается достаточно точным в широком диапазоне изменения всех параметров. С учетом предыдущего равенства окончательное выражение для расчета трения принимает вид

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \left\{ \frac{FK}{2 \left[0,123 + 0,82 \left(\lg \frac{FK}{2} + \frac{F+G}{2} \right) \right]} \right\}^2,$$

где F , K , G - известные функции, определяемые равенствами (3.118), (3.120), (3.127).

14.5. Профиль скоростей. Перейдем теперь к определению профиля скоростей в пограничном слое. В вязком подслое профиль скоростей описывается линейной зависимостью (3.72). Для нахождения профиля скоростей в турбулентном ядре пограничного слоя обратимся к равенству (3.71), предварительно преобразовав его к виду

$$\eta = \eta_a + \frac{\tau}{\tau_a} \exp \left[-\kappa \tau \int_0^{\bar{u}_a} \Psi d\bar{u} \right] \left[\int_0^{\bar{u}} \exp \left[\kappa \tau \int_0^{\bar{u}} \Psi d\bar{u} \right] d\bar{u} - \int_0^{\bar{u}_a} \exp \left[\kappa \tau \int_0^{\bar{u}} \Psi d\bar{u} \right] d\bar{u} \right]. \quad (3.137)$$

Здесь величина Ψ выражается равенством (3.67').

Принимая, как и ранее, для напряжения трения допущение (3.78) и полагая в вязком подслое (при $0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\delta$) плотность постоянной и равной ее значению на стенке, найдем из предыдущего равенства

$$\eta = \frac{e^{-\kappa \alpha}}{f} \int_0^{\bar{u}} \exp[\kappa \Gamma(\bar{u})] d\bar{u}. \quad (3.138)$$

Здесь $\Gamma(\bar{u})$ определяется равенством (3.93).

Подставляя в выражение (3.138) значение $\Gamma(\bar{u})$ из соотношения (3.93) и производя интегрирование, получим следующее выражение для профиля скоростей в турбулентном ядре:

$$\eta = \frac{e^{-\kappa \alpha}}{f \kappa} \left(\frac{\frac{\sqrt{1 - \omega \bar{u} - \beta \bar{u}^2} + \frac{\beta}{\kappa \zeta} \bar{u} + \frac{\omega}{2 \kappa \zeta}}{1 + \frac{\beta}{\kappa^2 \zeta^2}} \right) \times \\ \times \exp \left[\frac{\kappa \zeta}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} \bar{u} + \frac{\omega}{2 \sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4 \beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2 \sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4 \beta}}} \right) \right]. \quad (3.139)$$

После подстановки в (3.139) соответствующих значений эмпирических констант ($\alpha = 11,5$, $\kappa = 0,4$, $f = 1/\kappa \alpha = 0,218$) и логарифмирования, приведем профиль скоростей к следующему виду:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} \bar{u} + \frac{\omega}{2 \sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4 \beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2 \sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4 \beta}}} \right) + \\ + 5,75 \lg \left[\left(1 + 6,25 \beta / \zeta^2 \right)^{-1} (\sqrt{1 - \omega \bar{u} - \beta \bar{u}^2} + 2,5 \beta \bar{u} / \zeta + \right. \\ \left. + 1,25 \frac{\omega}{\zeta}) \right] = 5,75 \lg \eta + 5,5. \quad (3.140)$$

В предельном случае течения несжимаемой жидкости ($\beta = 0$) и при отсутствии теплообмена ($\omega = 0$) равенство (3.140) переходит в известный логарифмический профиль скоростей

$$\Psi = 5,75 \lg \eta + 5,5. \quad (3.141)$$

Если использовать выражение (3.94) для числа Рейнольдса R^{**} ,

то профиль скоростей (3.139) нетрудно преобразовать к следующей полезной в некоторых практических приложениях форме:

$$\frac{\tau}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta} \bar{u} + \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} - \arcsin \frac{\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta}}} \right) +$$

$$+ 5,751g \frac{0,4 \tau \left(\sqrt{1 - \omega \bar{u} - \beta \bar{u}^2} + \frac{2,5\beta \bar{u}}{\tau} + \frac{1,25\omega}{\tau} \right)}{\left(1 + \frac{6,25\beta}{\tau^2} \right) \left(\sqrt{1 - \omega - \beta} - \frac{5}{\tau} + \frac{3,75\omega}{\tau} + \frac{2,5\beta}{\tau} \right) \sqrt{1 - \omega - \beta}} = 5,751g \left(\frac{\gamma}{\delta^{**}} \right). \quad (3.142)$$

На рис. 6 наряду с экспериментальными профилями скоростей, полученными в опытах Хилла [36], нанесены расчетные профили. Сплошными линиями показаны профили скоростей, рассчитанные по формулам (3.72) (вязкий подслой) и (3.140) (турбулентное ядро). Штриховой линией показан логарифмический профиль скоростей в несжимаемой жидкости, рассчитанный по формуле (3.141). Сопоставление сплошных кривых с опытными точками свидетельствует о том, что во внутренней части турбулентного ядра расчетные и экспериментальные профили скоростей совпадают, и, следовательно, выражение (3.140) правильно учитывает влияние сжимаемости и температурного фактора. Полного совпадения расчетных и опытных профилей скоростей по всей толщине пограничного слоя нельзя было ожидать, так как во внешней части пограничного слоя, подобно тому как это имеет место в несжимаемом турбулентном пограничном слое, профиль скоростей описывается законом следа, а не логарифмической прямой. Несоответствие расчетных и опытных данных для $M_e = 8,99$, по-видимому, объясняется наличием продольного перепада давления в опытах при этом числе Маха [36].

О том, насколько удачно выбрано однопараметрическое семейство профилей скорости, можно в известной степени судить по соответствию расчетных и экспериментальных значений формпараметра $N^* = \delta^*/\delta^{**}$.

На рис. 25 приводится сравнение формпараметра N^* , рассчитанного по формуле (3.97), со значениями этого формпараметра, полученными в опытах Паппаса [131]. Как видно из графика, при увеличении числа Рейнольдса совпадение расчетных и опытных данных можно признать удовлетворительными.

О влиянии числа Маха (M_e) и температурного фактора (T_w/T_{0e} , T_{0e} — температура адиабатически и изэнтропически заторможенного газа на внешней границе) на формпараметр N^* можно судить по графикам рис. 26. Штриховые линии получены по соотношению (3.97) при разных числах Рейнольдса. Сплошной линией обозначены результаты расчета формпараметра N^* в предположении о степенном характере профиля скоростей ($u/U_e = (\eta/\delta)^{2/7}$) [132].

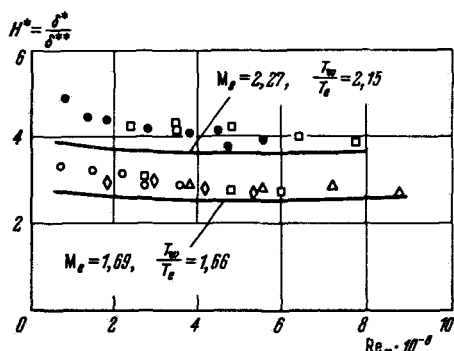


Рис. 25.

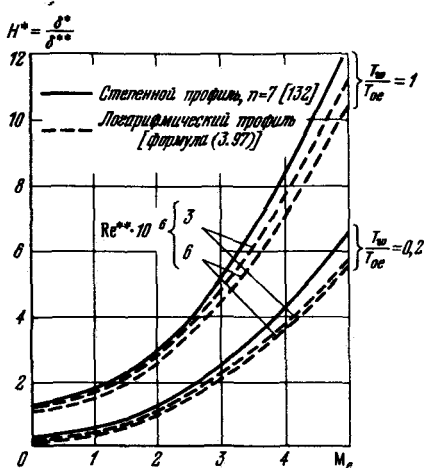


Рис. 26.

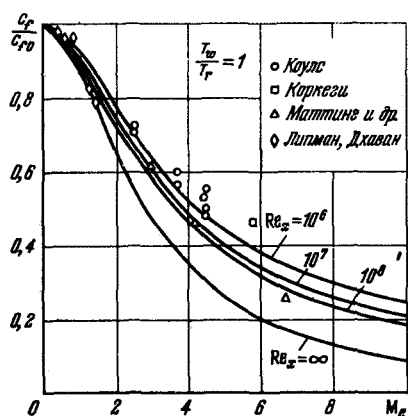


Рис. 27.

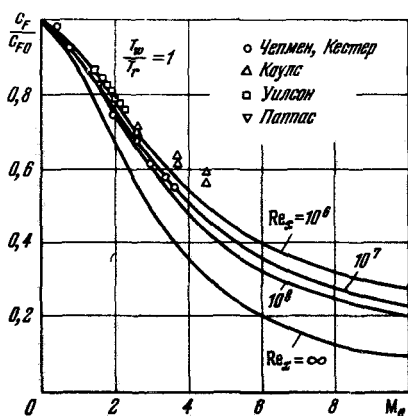


Рис. 28.

Из рассмотрения рис. 25 и 26 следует тривиальный, но тем не менее важный вывод: сжимаемость и теплообмен оказывают существенное влияние на формпараметр H^* .

14.6. Результаты расчетов коэффициента трения. Изложенный в настоящем параграфе полумпирический метод расчета трения в турбулентном пограничном слое на плоской пластине иллюстрируется графиками, изображенными на рис. 27–33. Там же для сравнения приведены опытные данные Коулса [133], Коркеги [134], Маттинга и др. [135], Липмана и Дхавана [136], Чепмена и Кестера [137], Уилсона [138], Паттаса [131], Винклера [139], Хилла [36], Лобба и др. [37] (отметим, что подробное описание указан-

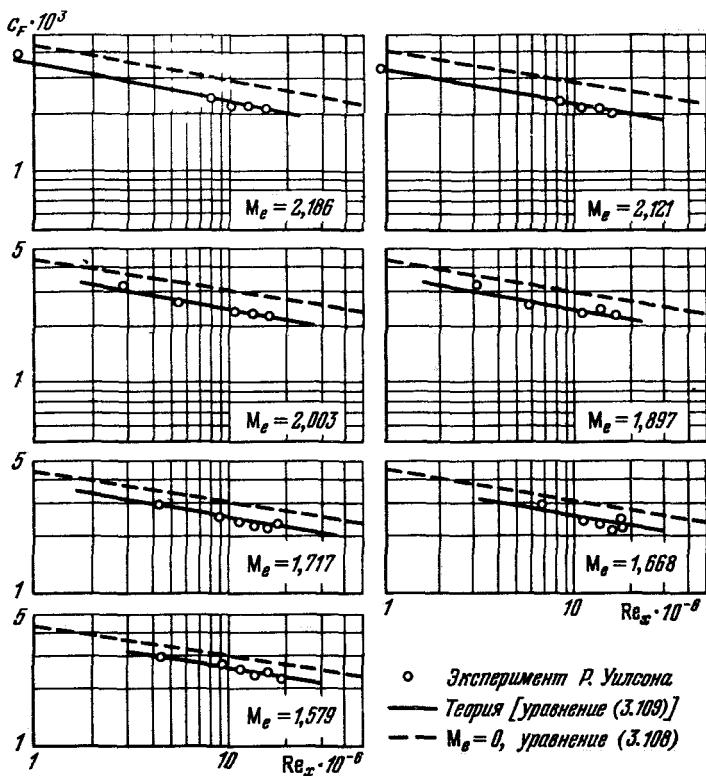


Рис. 29.

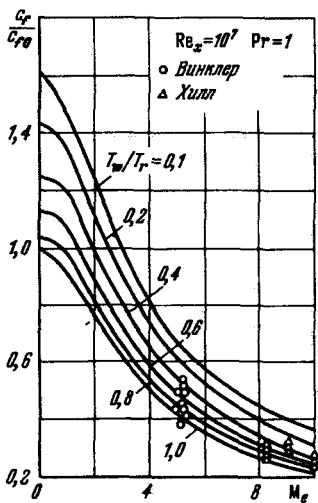


Рис. 30.

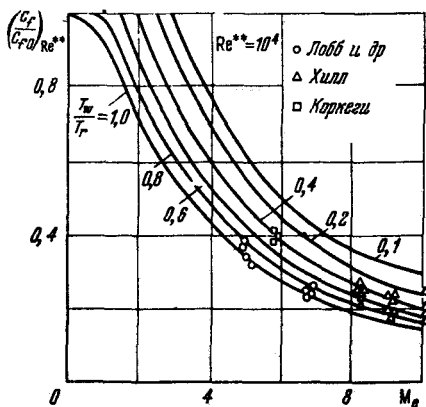


Рис. 31.

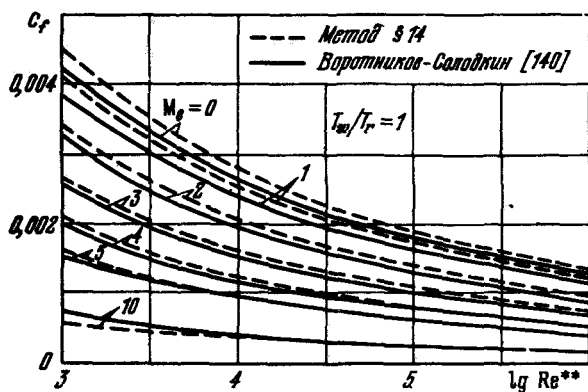


Рис. 32.

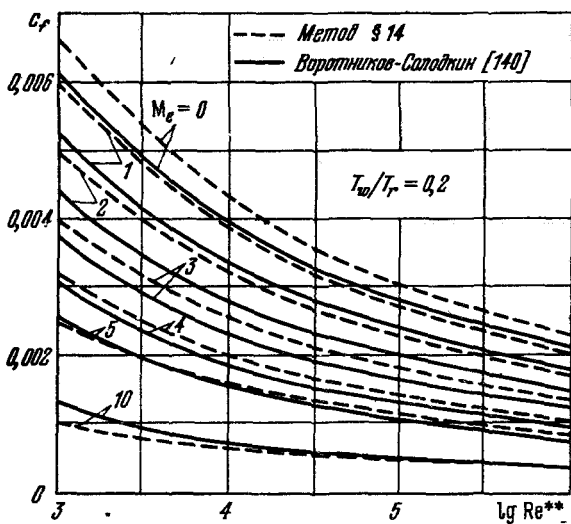


Рис. 33.

ных опытных результатов содержится в первом издании настоящей монографии [35].

На рис. 27 приведены результаты расчета местного коэффициента трения на теплоизолированной пластине для трех чисел Рейнольдса — 10^6 , 10^7 , 10^8 . Индексом ∞ обозначена кривая, рассчитанная по предельной формуле (3.129).

На рис. 28 представлены результаты расчета среднего коэффициента трения на теплоизолированной поверхности. Уместно отметить, что здесь, так же как и на рис. 27, опытные точки Коулса лежат выше расчетных кривых.

На рис. 29 результаты расчета среднего коэффициента трения на теплоизолированной пластине сравниваются с опытными данными

Уилсона [138]. Соответствие между расчетом и экспериментом следует признать хорошим.

На рис. 30 даны результаты расчета местного коэффициента трения на пластине, обменивающейся теплом с газом (тепловой поток направлен от газа к стенке).

На рис. 31 приведены результаты расчета отношения местного коэффициента трения в сжимаемом газе к коэффициенту трения в несжимаемой жидкости, причем оба коэффициента вычислены при одном и том же значении числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса (формула (3.135)).

На рис. 32, 33 представлены зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса Re^{**} при различных числах Маха и двух значениях температурного фактора $\bar{T}_w = T_w/T_e = 1,0$ (теплоизолированная стенка) и $\bar{T}_w = 0,2$ (сильно охлажденная стенка). Штриховые линии получены по изложенному методу, сплошные – по методу Солодкина – Воротникова [140]. Получивший известное распространение метод [140] основывается на использовании формулы Прандтля (2.133) и выражения (2.135) для пути смешения.

Сравнение результатов расчетов по изложенному методу с имеющимися опытными данными и результатами расчетов по другим известным методикам позволяет, по-видимому, оценить этот метод как надежный, простой и точный метод расчета характеристик турбулентного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

§ 15. ЭМПИРИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРЕНИЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ [146]

В основе метода лежит допущение о существовании следующей функциональной зависимости:

$$\frac{1}{2} c_f F_c = \psi^{**} (Re^{**} F_{Re^{**}}), \quad (3.143)$$

где функция ψ^{**} зависит только от числа Рейнольдса Re^{**} , построенного по толщине потери импульса, а функции F_c и $F_{Re^{**}}$ зависят только от числа Маха M_e и температурного фактора T_w/T_e .

Функции F_c и $F_{Re^{**}}$ таковы, что

$$\left. \begin{aligned} F_c &= F_c \left(M_e, \frac{T_w}{T_e} \right) = 1 \\ F_{Re^{**}} &= F_{Re^{**}} \left(M_e, \frac{T_w}{T_e} \right) = 1 \end{aligned} \right\} \text{при } M_e = 0 \quad \frac{T_w}{T_e} = 1. \quad (3.144)$$

Соображения, приводящие к зависимости (3.143), становятся очевидными, если представить эту зависимость в виде

$$\left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{Re^{**}} = \frac{F_{Re^{**}}}{F_c}, \quad (3.145)$$

где

$$c_{f0} = 2\psi^{**} Re^{**}. \quad (3.146)$$

Сравнивая равенство (3.145) с выражением (3.135) в § 14 замечаем, что, в отличие от (3.135), правая часть соотношения (3.145) не зависит от числа Re^{**} при достаточно больших числах Рейнольдса (см. предельную формулу (3.129)).

Для установления зависимости коэффициента трения c_f от числа Рейнольдса Re_x , построенного по расстоянию от передней кромки пластины, воспользуемся интегральным уравнением импульсов (3.60), записанным в форме

$$Re_x = \int_0^{Re^{**}} \frac{2}{c_f} d Re^{**}. \quad (3.147)$$

Умножая обе части этого равенства на $F_{Re^{**}}/F_c$, получим

$$\frac{F_{Re^{**}}}{F_c} Re_x = \int_0^{F_{Re^{**}} Re^{**}} \frac{2}{c_f F_c} d(F_{Re^{**}} Re^{**}). \quad (3.148)$$

Вводя обозначение

$$F_{Re_x} = \frac{F_{Re^{**}}}{F_c} = F_{Re_x} \left(M_e, \frac{T_w}{T_e} \right) \quad (3.149)$$

и замечая, что в соответствии с соотношением (3.143) существует однозначная связь между $c_f F_c$ и $F_{Re^{**}} Re^{**}$, приходим к заключению о существовании зависимости

$$\frac{1}{2} c_f F_c = \psi_x (Re_x F_{Re_x}), \quad (3.150)$$

где функция ψ_x зависит только от числа Re_x и не зависит от числа Маха M_e и температурного фактора T_w/T_e , а

$$F_{Re_x} = F_{Re_x} \left(M_e, \frac{T_w}{T_e} \right) = 1, \quad \text{при} \quad M_e = 0, \quad \frac{T_w}{T_e} = 1. \quad (3.151)$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{1}{2} c_F F_c = \bar{\psi} (Re_x F_{Re_x}), \quad (3.152)$$

где $\bar{\psi}$ опять-таки не зависит от M_e и T_w/T_e .

Равенства (3.150) и (3.152) можно представить в виде

$$\left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{Re_x} = \frac{F_{Re_x}}{F_c}, \quad (3.153)$$

$$\left(\frac{c_F}{c_{F0}} \right)_{Re_x} = \frac{F_{Re_x}}{F_c}. \quad (3.154)$$

Сравнивая выражения (3.153) и (3.154) с их аналогом (3.135), отметим, что, в отличие от (3.135), правые части (3.153) и (3.154) не зависят от числа Рейнольдса Re_x . Вследствие этого в рассматриваемом методе расчета имеет место равенство отношений

$$\left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{Re_x} = \left(\frac{c_F}{c_{F0}} \right)_{Re_x}$$

Для определения функций ψ^{**} , ψ_x и $\bar{\psi}$ авторы [146] использовали соотношения

$$Re^{**} = \frac{1}{8} \zeta_0^2 + \frac{1}{\kappa \alpha} \left[\left(2 - \frac{2}{\kappa \zeta_0} \right) \exp(\kappa \zeta_0) + \frac{2}{\kappa \zeta_0} + 1 - \frac{1}{6} (\kappa \zeta_0)^2 - \frac{1}{12} (\kappa \zeta_0)^3 - \frac{1}{40} (\kappa \zeta_0)^4 - \frac{1}{180} (\kappa \zeta_0)^5 \right], \quad (3.155)$$

$$Re_x = \frac{1}{12} \zeta_0^2 + \frac{1}{\kappa \alpha} \left[(6 - \kappa \zeta_0 + (\kappa \zeta_0)^2) \exp \kappa \zeta_0 - 6 - 2 \kappa \zeta_0 - \frac{1}{12} (\kappa \zeta_0)^4 - \frac{1}{20} (\kappa \zeta_0)^5 - \frac{1}{60} (\kappa \zeta_0)^6 - \frac{1}{252} (\kappa \zeta_0)^7 \right], \quad (3.156)$$

$$\frac{1}{2} c_{F0} = \frac{Re^{**}}{Re_x}, \quad (3.157)$$

где $\kappa = 0,4$, $\alpha = 12$, $\zeta_0 = \sqrt{2/c_{f0}}$.

Таблица 3

Значения функции F_e при различных значениях M_e и T_w/T_e

$\frac{T_w}{T_e} \backslash M_e$	0	1	2	3	4	5	6	7
0,05	0,3743	0,4036	0,4884	0,6222	0,7999	1,0184	1,2759	1,5713
0,1	0,4331	0,4625	0,5477	0,6829	0,8628	1,0842	1,3451	1,6444
0,2	0,5236	0,5530	0,6388	0,7756	0,9584	1,1836	1,4491	1,7534
0,3	0,5989	0,6283	0,7145	0,8523	1,0370	1,2649	1,5337	1,8418
0,4	0,6662	0,6957	0,7821	0,9208	1,1069	1,3370	1,6083	1,9194
0,5	0,7286	0,7580	0,8446	0,9839	1,1713	1,4031	1,6767	1,9903
0,6	0,7873	0,8168	0,9036	1,0434	1,2318	1,4651	1,7405	2,0564
0,8	0,8972	0,9267	1,0137	1,1544	1,3445	1,5802	1,8589	2,1785
1	1,0000	1,0295	1,1167	1,2581	1,4494	1,6871	1,9684	2,2913
2	1,4571	1,4867	1,5744	1,7176	1,9130	2,1572	2,4472	2,7809

3	1,8660	1,8956	1,9836	2,1278	2,3254	2,5733	2,8687	3,2092
4	2,2500	2,2796	2,3678	2,5126	2,7117	2,9621	3,2611	3,6066
5	2,6180	2,6477	2,7359	2,8812	3,0813	3,3336	3,6355	3,9847
6	2,9747	3,0044	3,0927	3,2384	3,4393	3,6930	3,9974	4,3493
8	3,6642	3,6938	3,7823	3,9284	4,1305	4,3863	4,6937	5,0505
10	4,3311	4,3608	4,4493	4,5958	4,7986	5,0559	5,3657	5,7259
12	4,9821	5,0117	5,1003	5,2470	5,4504	5,7088	6,0204	6,3832
14	5,6208	5,6505	5,7391	5,8860	6,0898	6,3491	6,6621	7,0271
16	6,2500	6,2797	6,3683	6,5153	6,7196	6,9795	7,2937	7,6603
18	6,8713	6,9010	6,9897	7,1368	7,3413	7,6019	7,9170	8,2851
20	7,4861	7,5157	7,6045	7,7517	7,9564	8,2175	8,5334	8,9027
25	9,0000	9,0297	9,1184	9,2658	9,4711	9,7330	10,0505	10,4222
30	10,4886	10,5183	10,6071	10,7546	10,9602	11,2228	11,5415	11,9149

Таблица 4

Значения функции Γ_{Re} при различных значениях M_e и T_w/T_e

M_e T_w/T_e	0	1	2	3	4	5	6	7
0,05	82,7405	93,8950	125,3092	173,1153	234,1638	306,3489	388,2642	478,9229
0,1	29,7852	33,8006	45,1092	62,3185	84,2949	110,2803	139,7684	172,4040
0,2	10,7221	12,1676	16,2385	22,4336	30,3447	39,6990	50,3142	62,0625
0,3	6,8983	6,6934	8,9328	12,3407	16,6926	21,8384	27,6779	34,1406
0,4	3,8598	4,3801	5,8456	8,0757	10,9236	14,2910	18,1123	22,3414
0,5	2,2779	3,1524	4,2071	5,8121	7,9618	10,2853	13,0355	16,0792
0,6	2,1233	2,4095	3,2157	4,4424	6,0091	6,8615	9,9636	12,2900
0,8	1,3895	1,5768	2,1043	2,9071	3,9323	5,1445	6,5201	8,0425
1	1,0000	1,1348	1,5145	0,0923	2,8301	3,7025	4,6926	5,7883
2	0,3600	0,4085	0,5452	0,7532	1,0188	1,3328	1,6892	2,0837

3	0,1980	0,2247	0,2999	0,4143	0,5604	0,7332	0,9292	1,1462
4	0,1296	0,1471	0,1963	0,2711	0,3667	0,4798	0,6081	0,7501
5	0,0933	0,1058	1,1412	0,1951	0,2639	0,3453	0,4377	0,5398
6	0,0713	0,0809	0,1080	0,1491	0,2017	0,2639	0,3345	0,4126
8	0,0466	0,0529	0,0706	0,0976	0,1320	0,1727	0,2189	0,2700
10	0,0336	0,0381	0,0508	0,0702	0,0950	0,1243	0,1575	0,1943
12	0,0257	0,0291	0,0389	0,0537	0,0726	0,0950	0,1204	0,1485
15	0,0204	0,0232	0,0310	0,0428	0,0579	0,0757	0,0959	0,1183
16	0,0168	0,0191	0,0254	0,0351	0,0475	0,0622	0,0788	0,0972
18	0,0141	0,0160	0,0214	0,0295	0,0400	0,0523	0,0662	0,0817
20	0,0121	0,0137	0,0183	0,0253	0,0342	0,0447	0,0567	0,0700
25	0,0087	0,0099	0,0132	0,0182	0,0246	0,0322	0,0408	0,0503
30	0,0066	0,0075	0,0101	0,0139	0,0188	0,0246	0,0312	0,0385

Вид одной из двух неизвестных функций F_c и $F_{Re^{**}}$ (или F_{Re_z}), определяющих коэффициент трения, а именно функции F_c , был выбран на основе анализа существующих полуэмпирических методов расчета. Проведенный авторами [146] анализ полуэмпирических методов показал, что наиболее высокую точность дают методы, результаты которых, будучи представлены в форме (3.145), (3.153) или (3.154), приводят к следующему выражению для F_c :

$$F_c = \frac{1}{K^2}, \quad (3.158)$$

где K выражается равенством (3.120), а коэффициенты ω и β , входящие в (3.120), определяются по формулам (3.46). Иными словами, функция F_c определяется точно так же, как это было сделано в полуэмпирическом методе, изложенном в § 14.

Вторая неизвестная функция $F_{Re^{**}}$ была определена эмпирически путем использования экспериментальных данных по коэффициенту трения. Предполагалось, что функция $F_{Re^{**}}$ имеет вид

$$F_{Re^{**}} = \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^p \left(\frac{T_r}{T_w} \right)^q. \quad (3.159)$$

Соображения, приводящие к выражению (3.159), получены также на основе анализа существующих полуэмпирических методов.

Используя функции $\psi_{Re^{**}}$, ψ_z , $\bar{\psi}$ и F_c , определенные выше, а также многочисленные экспериментальные данные, авторы метода нашли величины p и q из условия получения наименьшего средне-квадратичного значения величины

$$\frac{c_{f, \text{эксп}} - c_{f, \text{теор}}}{c_{f, \text{теор}}}.$$

В результате оказалось, что $p = -0,702$, а $q = 0,772$. Соответственно выражение для $F_{Re^{**}}$ получается в виде

$$F_{Re^{**}} = \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{-0,702} \left(\frac{T_r}{T_w} \right)^{0,772} \quad (3.160)$$

В случае течения вблизи теплоизолированной стенки

$$F_{Re^{**}} = \left(\frac{T_r}{T_e} \right)^{-0,702} \quad (3.161)$$

Таблица 5

Значения функций $F_{c c_f}$, $F_{c c_F}$, $F_{Re^{**} Re^{**}}$ и $F_{Re_x Re_x}$

$F_{c c_f}$	$F_{c c_F}$	$F_{Re^{**} Re^{**}}$	$F_{Re_x Re_x}$
0,0010	0,001117	$2,878 \cdot 10^7$	$5,758 \cdot 10^{10}$
0,0015	0,001716	$3,955 \cdot 10^5$	$4,610 \cdot 10^8$
0,0020	0,002333	$5,425 \cdot 10^4$	$4,651 \cdot 10^7$
0,0025	0,002967	$1,386 \cdot 10^4$	$9,340 \cdot 10^6$
0,0030	0,003621	5030	$2,778 \cdot 10^6$
0,0035	0,004299	2283	$1,062 \cdot 10^6$
0,0040	0,005006	1208	$4,828 \cdot 10^5$
0,0045	0,005747	716,0	$2,492 \cdot 10^5$
0,0050	0,006526	462,3	$1,417 \cdot 10^5$
0,0055	0,007345	319,4	$8,697 \cdot 10^4$
0,0060	0,008205	233,0	$5,679 \cdot 10^4$
0,0065	0,009105	177,6	$3,901 \cdot 10^4$
0,0070	0,010042	140,4	$2,796 \cdot 10^4$
0,0075	0,011014	114,4	$2,078 \cdot 10^4$
0,0080	0,012016	95,62	$1,592 \cdot 10^4$
0,0085	0,01304	92,49	$1,251 \cdot 10^4$
0,0090	0,01409	73,91	$1,006 \cdot 10^4$
0,0095	0,01516	62,55	$8,253 \cdot 10^3$
0,0100	0,01624	55,87	$6,883 \cdot 10^3$
0,0105	0,01732	50,46	$5,826 \cdot 10^3$

Сравнение изложенного метода с опытными данными, проведенное его авторами, показало, что этот метод дает наименьшую по сравнению с другими методами величину среднеквадратичной ошибки, а именно 9,9%.

Для упрощения расчетов необходимые вспомогательные функции были затабулированы (табл. 3-5).

Последовательность расчета по изложенному методу сводится к следующему. По заданному числу Маха M_e и температурному фактору T_w/T_e по табл. 3 определяется функция F_c . Затем по уравнению (3.160) или табл. 4 определяется функция $F_{Re^{**}}$, а затем по формуле (3.149) F_{Re_x} . Наконец, по заданному числу Рейнольдса (Re^{**} или Re_x) и уже определенным ранее функциям F_{Re_x} (или $F_{Re^{**}}$) и F_c по табл. 5 определяются значения c_f и c_F .

Рассмотренный метод расчета трения в турбулентном пограничном слое на плоской пластине не содержит каких-либо новых физических гипотез. Выражение для функции F_c было принято таким же, как в рассмотренном в § 14 полуэмпирическом методе. Функция $F_{Re^{**}}$ была определена чисто эмпирически. В целом метод может быть рекомендован как простой инженерный метод расчета трения на плоской пластине.

§ 16. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КОНУСЕ ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ АТАКИ [147]

Наряду с течением вблизи плоской пластины, простейшим для теоретического анализа является течение вблизи конуса, расположенного под нулевым углом атаки, если угол раствора конуса таков, что образующаяся перед конусом головная ударная волна является присоединенной (рис. 34). В этом случае движение газа за ударной волной будет "коническим", а давление на поверхности конуса — постоянным. Это обстоятельство сближает течение в пограничном слое на конусе с течением вблизи плоской пластины. Как показал Ван-Дрифт [147] существует простое приближенное правило для пересчета местного коэффициента трения на пластине в аналогичный коэффициент для конуса.

Для установления этого правила обратимся к интегральному соотношению импульсов (2.117). В случае обтекания конуса с непроницаемой поверхностью ($v_w = 0$) это соотношение принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{\tau_w}{\rho_e U_e^2} \quad (3.162)$$

Здесь принято во внимание (рис. 34), что $\tau_0 = x \sin \theta$; θ — угол

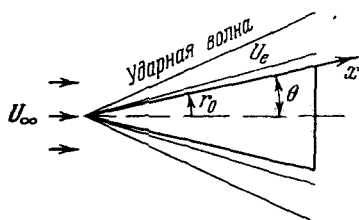


Рис. 34.

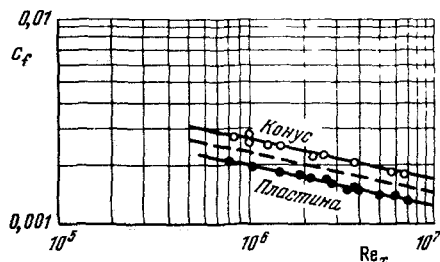


Рис. 35.

полураствора конуса. Уравнение (3.162) легко преобразовать к виду

$$Re_x \, d Re_x = \frac{\rho_e}{\rho_w} \zeta^2 \, d (Re^{**} Re_x), \quad (3.163)$$

где параметр ζ выражается равенством (3.57), а числа Рейнольдса Re_x и Re^{**} — равенствами (3.55) и (3.54).

Если принять, что механизм течения в пограничном слое около конуса и пластины одинаков (оба течения безградиентны, т.е. $dp/dx = 0$), то можно ожидать, что функциональные выражения для профиля скоростей и толщины потери импульса на этих телах будут также одинаковы. В этом случае для числа Рейнольдса Re^{**} можно воспользоваться его выражением (3.95), полученным для плоской пластины. Пригладывая при этом более грубое приближение (такое же, как в § 11), т.е. отбрасывая второй член в правой части соотношения (3.95), будем иметь

$$Re^{**} = \frac{e^{-\kappa \alpha}}{i \kappa^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp[\kappa \zeta I(1)]. \quad (3.164)$$

После подстановки выражения (3.164) в уравнение (3.163) и его последующего интегрирования с той же степенью точности, что и в § 14, получим аналог равенства (3.99) для конуса

$$c_1 \frac{e^{-\kappa \alpha}}{i \kappa^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \frac{\rho_e}{\rho_w} \zeta^2 \exp[\kappa \zeta I(1)] = \frac{1}{2} Re_x. \quad (3.165)$$

Так как параметр ζ эквивалентен местному коэффициенту трения c_f (см. формулу (3.57)), то из сравнения равенств (3.165) и (3.99) следует простое правило, согласно которому местный коэффициент трения для конуса равен значению этого коэффициента для плоской пластины, рассчитанному при числе Рейнольдса Re_x , составляющем половину этого числа для конуса, и тех же значениях

температурного фактора и числа Маха на внешней границе пограничного слоя.

Если сравнить коэффициенты местного трения на конусе и пластине при одинаковых числах Рейнольдса и одинаковых значениях температурного фактора и числа Маха на внешней границе, то окажется, что для конуса эти коэффициенты на 10-15% больше коэффициентов для плоской пластины.

Анализ связи местных и средних коэффициентов трения на конусе и пластине с использованием интегрального соотношения импульсов, степенных профилей скоростей и закона сопротивления был проведен Брэдфилдом [148]. В результате им было получено соотношение

$$\frac{c_{fk}}{c_{fпх}} = \left[\frac{2(n+2)}{n+1} \right]^{\frac{2}{n+3}} \quad (3.166)$$

где $1/n$ - показатель степени в выражении профиля скоростей

$u/U_e = (y/\delta)^{1/n}$. При $n = 7$ соотношение (3.166) дает

$c_{fk}/c_{fпх} = 1,18$, при изменении n в диапазоне от 5 до 10 отношение $c_{fk}/c_{fпх}$ изменяется от 1,13 до 1,23.

Для средних коэффициентов трения было установлено, что

$$\frac{C_{Fк}}{C_{Fпх}} = 2 \left[\frac{n+1}{2(n+2)} \right]^{\frac{n+1}{n+3}} \quad (3.167)$$

При $5 < n < 10$ из выражения (3.167) следует, что $1,035 < C_{Fк}/C_{Fпх} < 1,065$; при $n = 7$ $C_{Fк}/C_{Fпх} = 1,05$.

Наряду с указанным анализом в работе Брэдфилда приводятся результаты измерений местного коэффициента трения на конусе с углом полураствора 15° при числе Маха $M_e = 3,7$ и различных числах Рейнольдса. Результаты измерений приведены на рис. 35 (светлые кружки), темными кружками отмечены результаты измерений Коулса [133] на плоской пластине для тех же условий; изображена зависимость $c_{fk} = 1,18 c_{fпх}$. Как видно из рис. 35, трение на конусе примерно на 28% выше трения на пластине. По-видимому, как правило Ван-Дрифта, так и соотношение Брэдфилда (3.166) приводят к несколько заниженным значениям трения на конусе по сравнению с действительными.

§ 17. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ ПРИ НЕБОЛЬШИХ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ДАВЛЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНЕ МЕЖДУ ГАЗОМ И СТЕНКОЙ (РАСЧЕТ ТРЕНИЯ)

17.1. Предварительные замечания. Некоторые проблемы полуэмпирической теории турбулентности применительно к неравновесным (в смысле Клаузера) течениям были рассмотрены в п. 11.7 § 11. Основной вывод, вытекающий из анализа проблемы, сводится к заключению о том, что современные гипотезы турбулентности для внешней области пограничного слоя и применяемые способы "стыковки" решений на границе двух областей (внутренней и внешней) не обеспечивают надежных возможностей для расчета сильно неравновесных течений, в частности предотрывной области и точки отрыва. Наличие эффектов сжимаемости и теплообмена между газом и стенкой приводит к дополнительным трудностям.

Существующие интегральные методы расчета турбулентного пограничного слоя в газовых потоках больших скоростей при наличии продольного перепада давления и теплообмена между газом и стенкой, как правило, являются обобщением и дальнейшим развитием в большинстве своем однопараметрических методов расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. "Однопараметрический" характер методов естественно ограничивает возможности их применения к течениям с сильно изменяющимися граничными условиями.

Характерной чертой большинства этих методов является использование интегральных соотношений (импульсов, энергии и др.). Число неизвестных, содержащихся в этих интегральных соотношениях, как обычно, превосходит число уравнений. Поэтому основное значение в этих методах приобретает выбор семейств профилей скоростей и температур, которые могли бы быть использованы для подстановки в интегральные соотношения вместо действительных, остающихся неизвестными. При современном состоянии теории уже сам этот выбор представляет трудную задачу. Для задания поля скоростей, наряду с применением полуэмпирической теории турбулентности Прандтля — Кармана, иногда используют одночленные степенные формулы с переменным показателем степени, зависящим от различных параметров.

При построении интегральных методов расчета, основывающихся на полуэмпирической теории турбулентности Прандтля, наряду с выбором выражения для пути турбулентного перемешивания l важное значение приобретает выбор соотношения, описывающего распределение касательных напряжений по сечению пограничного слоя. Наибольшее распространение при этом получили различные полиномиальные представления τ , подобные тем, которые были впервые использованы еще в 30-е годы в работах К.К. Федяевского. Опыт применения таких методов свидетельствует о том, что этот путь далеко не всегда приводит к удовлетворительным результатам. Основная причина неудовлетворительности существующих методов расчета турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе при

наличии продольного перепада давления заключается в их "однопараметричности", иными словами, в невозможности с помощью однопараметрических семейств профилей скорости описать все многообразие течений в пограничных слоях. Разумеется, утверждение о "неудовлетворительности существующих методов" следует понимать в широком смысле. Некоторые из этих методов не без успеха применялись к расчету различных конкретных течений, однако успехи эти носят пока что локальный характер.

Полуэмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя в газе при наличии теплообмена и произвольном распределении давления во внешнем потоке развит в работе Л.Е. Калихмана [149]. В этом методе, основывающемся на использовании формулы полуэмпирической теории Прандтля, нахождение трения и теплообмена в пограничном слое сводится к решению линейных дифференциальных уравнений, приближенно эквивалентных интегральным соотношениям импульсов и энергии, и последующему переходу по вспомогательным таблицам и графикам от найденных из этих уравнений функций к искомым (т.е. коэффициентам трения и теплообмена). Решение строится на основе двухслойной прандтлевской схемы. Для пути перемешивания принимается линейная зависимость $l = \kappa y$, а напряжение трения τ считается постоянным по сечению пограничного слоя, равным его значению на стенке.

По существу, к полуэмпирическим методам близко примыкает метод С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьева расчета турбулентного пограничного слоя на криволинейной поверхности, основанный на использовании предельных законов трения и теплообмена [129]. В этой работе, в отличие от [149], для τ принимается полиномиальное представление

$$\frac{\tau}{\tau_w} = (1 - 3\bar{y}^2 - 2\bar{y}^3) + \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} \bar{y} (1 - \bar{y})^2.$$

Здесь $\bar{y} = y/\delta$, δ — толщина пограничного слоя.

В работе Г.В. Кочерыженкова [230] в основу метода положены квадратичное распределение напряжения трения в пограничном слое

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \bar{y} + \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx} \bar{y} (1 - \bar{y})$$

и полуэмпирическая теория Прандтля ($l = \kappa y$).

Использование полиномиальных представлений для τ , в отличие от допущения $\tau = \text{const} = \tau_w$, позволяет частично учесть прямое влияние продольного перепада давления на профиль скоростей в пограничном слое. В случае принятия допущения о постоянстве напряжения трения учет влияния продольного перепада давления на трение осуществляется только через интегральное соотношение импульсов. Однако, как это уже отмечалось выше, учет влияния на профиль скоростей через распределение τ/τ_w не обеспечивает во мно-

гих случаях удовлетворительного описания профиля скоростей (это обстоятельство отмечается, в частности, в монографии Ротты [150].

Методы расчета турбулентного пограничного слоя в окрестности критической точки затупленного тела, основывающиеся на учете влияния продольного градиента давления лишь через уравнение импульсов, были разработаны Сибулкиным [151], Вальо-Лореном [152], Ван-Дристом [153], П.П. Воротниковым [154].

В первых трех из указанных работ [151 - 153] были использованы степенные профили скоростей, в последней - логарифмический профиль, получающийся из формулы Прандтля ($\tau = \text{const} = \tau_w, \delta = \pi y$).

Степенное распределение скоростей в пограничном слое, записанное в переменных Дородницына, а также экспериментально установленные степенные законы сопротивления и теплообмена на плоской пластине положены в основу метода "эффективной длины" В.С. Авдеевского [155]. Расчет сопротивления и теплоотдачи в турбулентном пограничном слое сжимаемого газа при умеренных продольных передачах давления в конечном итоге сводится к расчету по формулам плоской пластины, в которых вместо действительной координаты, характеризующей положение точки на поверхности тела, используется некоторая "эффективная длина", определяемая из интегральных условий.

Эмпирические методы расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного перепада давления развиты в работах Маклафферти и Барбера [156] и Сасмена и Кресчи [157].

В последней из указанных работ задача сводится к совместному решению интегральных уравнений импульсов и момента количества движения, упрощенных с помощью преобразования Магера [158]. Распределение напряжений трения поперек пограничного слоя принимается таким же, как в равновесных турбулентных пограничных слоях в несжимаемой жидкости. В качестве закона сопротивления используется известная в теории турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости эмпирическая формула Людвига - Тилмана, устанавливающая связь коэффициента сопротивления с толщиной потери импульса δ^{**} и формпараметром $H^* = \delta^* / \delta^{**}$. Обобщение этой формулы на течение с переменной плотностью осуществляется посредством метода определяющей температуры, предложенного Эккертом [159]. Сравнение расчетов по методу Сасмена - Кресчи с опытными данными свидетельствует об их хорошем соответствии при умеренных продольных перепадах давления. Расчеты течений с отрывом произведено не было.

В работе Шана [160] предпринята попытка обобщить известный метод Бури расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости [46] на течения сжимаемого газа без теплообмена [160]. При этом для преобразования уравнений пограничного слоя в сжимаемом газе к форме, соответствующей течению несжимаемой жидкости, использовалось преобразование Магера [158]. В качестве закона сопротивления в [160], так же как и в [159], использовалась формула Людвига - Тилмана. Результаты расчетов

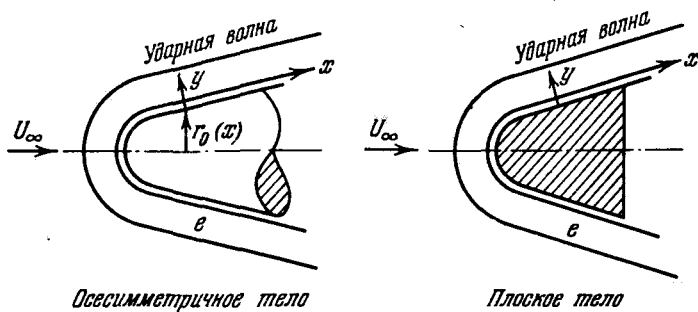


Рис. 36.

по методу Шана оказались близкими к результатам [159]. Расчет отрывных течений здесь также не производился.

Подводя итог приведенному краткому обзору интегральных методов расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковых потоках при наличии продольного перепада давления и теплообмене между газом и стенкой можно, по-видимому, констатировать, основываясь главным образом на опыте применения подобного рода методов для расчетов течений в несжимаемой жидкости, что эти методы приводят к более или менее удовлетворительным результатам лишь в тех случаях, когда влияние продольного перепада давления на форму профиля скорости невелико.

В настоящем параграфе излагаются методы расчета, в которых учет влияния продольного перепада давления на трение осуществляется только через посредство интегрального соотношения импульсов, а прямым влиянием перепада давления на профиль скоростей пренебрегается. Принятые допущения, как показывает опыт, справедливы для течений с небольшими отрицательными и положительными градиентами давления. Последнее ограничение, по существу, означает, что из рассмотрения исключаются предотрывные и отрывные течения.

1.7.2. Метод расчета, основанный на линеаризации интегрального соотношения импульсов. Рассмотрим обтекание криволинейной поверхности установившимся потоком газа (рис. 36). Введем криволинейную систему координат. Положение точки в потоке будем характеризовать координатой x , отсчитываемой вдоль поверхности от критической точки, и координатой y , отсчитываемой по нормали к поверхности.

Обратимся к интегральному соотношению импульсов (2.117), которое в случае течения вблизи непроницаемой поверхности ($v_w = 0$) принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U_e'}{U_e} (2 + H^* - M_e^2) \delta^{**} + \frac{(\tau_0')}{\tau_0} \delta^{**} = \frac{\tau_w}{\rho_e U_e^2}. \quad (3.168)$$

Для дальнейшего удобно записать уравнение (3.168) в несколько иной форме, которая получается после исключения из этого уравне-

ния с помощью равенства (2.116) члена с M_e^2 . Опуская простые преобразования, будем иметь

$$\frac{1}{\rho_e U_e} \frac{d}{dx} (\rho_e U_e \delta^{**}) + \delta^{**} \left[\frac{U_e'}{U_e} (1 + H^*) + \frac{(\tau_0')'}{\tau_0'} \right] = \frac{1}{\xi^2} \frac{\rho_w}{\rho_e} \quad (3.169)$$

Здесь ξ выражается равенством (3.57).

Далее, следуя приему, использованному в цитированной уже в этом параграфе работе Л.Е. Калихмана, введем новую переменную

$$z = \rho_e U_e \delta^{**} \xi^2. \quad (3.170)$$

Первый член в левой части уравнения (3.169) с учетом соотношения (3.170) преобразуем к виду

$$\frac{1}{\rho_e U_e} \frac{d}{dx} (\rho_e U_e \delta^{**}) = \frac{1}{\rho_e U_e \xi^2 A} \frac{dz}{dx}. \quad (3.171)$$

Здесь введено обозначение

$$A = \frac{d \ln z}{d \ln (\rho_e U_e \delta^{**})} = 1 + \frac{2}{\frac{d \ln (\rho_e U_e \delta^{**})}{d \ln \xi}}. \quad (3.172)$$

Используя равенство (3.171), приведем интегральное соотношение импульсов (3.169) к следующей форме:

$$\frac{dz}{dx} + A \left[\frac{U_e'}{U_e} (1 + H^*) + \frac{(\tau_0')'}{\tau_0'} \right] z = \rho_w U_e A. \quad (3.173)$$

Уместно отметить, что дифференциальное уравнение (3.173) для функции z является столь же точным, как и исходное уравнение (3.169).

Прежде чем переходить к вопросу об интегрировании уравнения (3.173), следует установить характер зависимости параметров

A и H , входящих в это уравнение, от искомой функции z . Для установления этой зависимости необходимо иметь "закон" сопротивления, т.е. связь толщины потери импульса (δ^{**}) с трением (ξ). Поскольку здесь рассматриваются лишь такие течения, в которых прямое влияние продольного перепада давления на форму профиля скорости незначительно, то очевидно, что в качестве закона сопротивления можно принять закон сопротивления для плоской пластины (3.94), установленный в § 14. Следует лишь иметь в виду, что параметры на внешней границе пограничного слоя $U_e(x)$, $\omega(x)$, $\beta(x)$ и т.д. в рассматриваемом случае являются переменными. Кроме того, так же как в § 14, воспользуемся "огрубленным" выражением закона сопротивления, отбросив для простоты второй член в квадратных скобках равенства (3.94). Чтобы "скомпенсировать" вызванную таким приближением ошибку,

введем в закон сопротивления некоторую постоянную ζ_1 , разумный выбор которой позволит в дальнейшем уточнить полученный результат (напомним, что подобный прием использовался Карманом при выводе формулы сопротивления (3.101)). Преобразованный таким образом закон сопротивления будет иметь вид

$$\delta^{**} = \zeta_2 \frac{\mu_w}{\rho_e U_e} \exp[\kappa \zeta I(1)], \quad \zeta_2 = \zeta_1 \frac{e^{-\kappa \omega}}{i \kappa^2}. \quad (3.174)$$

Здесь величина $I(1)$ выражается равенством (3.96), а ω и β , входящие в выражение (3.174), — соотношениями (3.46).

Подставив выражение для толщины потери импульса (3.174) в равенство (3.170), получим связь функции z с параметром трения ζ

$$z = \zeta_2 \mu_w \zeta^2 \exp[\kappa \zeta I(1)]. \quad (3.175)$$

Как видно из равенства (3.175), зависимость параметра трения ζ от функции z является, по существу, логарифмической, что позволяет ограничиться приближенным вычислением функции $z(x)$. Как следствие этого для расчета параметра H^* можно воспользоваться его выражением для плоской пластины (3.97), что представляется оправданным в рамках принятого здесь приближенного подхода.

Выражение для функции A (3.172) после подстановки в него закона сопротивления (3.174) принимает вид

$$A = 1 + 2 / (\kappa \zeta I(1)). \quad (3.176)$$

Зависимость функций H^* и A от параметра трения ζ , и, следовательно, через посредство равенства (3.175) от искомой функции z , приводит задачу нахождения этой функции к интегрированию весьма сложного нелинейного уравнения (3.173). Точное интегрирование этого уравнения представляет большие трудности и, как будет видно из дальнейшего, не является необходимым. Упрощение может быть достигнуто за счет того, что функции H^* и A очень слабо зависят от параметра трения ζ . Это обстоятельство позволяет ограничиться приближенным определением H^* и A при значениях параметра ζ , вычисленных по формулам плоской пластины (§ 14). Что касается параметров β и ω (см. равенства (3.46)), от которых наряду с параметром ζ зависят H^* и A , то их следует вычислять в каждом сечении пограничного слоя по местным значениям числа Маха M_e и температурного фактора T_w/T_e . Таким образом, функции A и H^* до начала интегрирования уравнения (3.173) можно считать известными функциями продольной координаты x .

Принятый приближенный способ определения параметров A и H^* , как показывают приводимые ниже оценки, не должны привести к заметным погрешностям в вычислении функции $z(x)$ по уравнению (3.173).

Оценим значение параметра A для случая обтекания плоской пластины несжимаемой жидкостью в изотермических условиях. За-
мечая, что в этом случае $I(1) = 1$ и используя формулу сопротивления (3.121), получим из (3.176)

$$A = 1 + 2 / (\pi \xi_0) = 1 + 3,54 \sqrt{\epsilon_{f0}} = 1 + 0,575 Re_x^{-1/4}. \quad (3.177)$$

Из выражения (3.177) следует, что при изменении числа Рейнольдса на два порядка (от 10^5 до 10^7) величина A изменяется на 6% (от 1,25 до 1,18). В общем случае течения сжимаемого газа при наличии теплообмена между газом и стенкой изменение параметра A в реальных условиях также не будет слишком значительным.

Результаты расчета параметра H по формуле (3.97) для случая обтекания плоской пластины потоком воздуха при $M_e = 1,69$, $T_w/T_e = 1,66$ и $M_e = 2,27$, $T_w/T_e = 2,15$ приведены на рис. 25.

Там же приведены опытные точки, полученные Паппасом для этих же условий течения. Как видно из рис. 25, параметр H^* очень слабо зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, от параметра трения ξ . Факт слабой зависимости H^* от параметра ξ хорошо подтверждается опытными данными и в случае обтекания пластины несжимаемой жидкостью. Так, измерения Шульц-Грунова [161] и Хамы [162] на гладких пластинах показали, что при изменении параметра ξ_0 от 18 до 30 параметр H^* изменяется от 1,5 до 1,25. Результаты применения формулы (3.97) к течениям несжимаемой жидкости также находятся в удовлетворительном соответствии с опытными данными.

Результаты проведенного анализа поведения параметров H^* и A можно представить в виде

$$\begin{aligned} H^* [M_e, T_w/T_e, \xi(M_e, T_w/T_e, Re_x)] &\approx \\ &\approx H^* [M_e, T_w/T_e, \xi_{пл}(M_e, T_w/T_e, Re_x)], \\ A [M_e, T_w/T_e, \xi(M_e, T_w/T_e, Re_x)] &\approx \\ &\approx A [M_e, T_w/T_e, \xi_{пл}(M_e, T_w/T_e, Re_x)]. \end{aligned} \quad (3.178)$$

В приведенных формулах индекс "пл" означает, что данная величина определяется по формулам, полученным для течения вдоль плоской пластины.

Если принять выражаемый равенствами (3.178) приближенный способ определения параметров H^* и A , то задача нахождения функции $z(x)$ сведется к интегрированию следующего линейного

дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x), \quad (3.179)$$

где

$$P(x) = A \left[\frac{U_e'}{U_e} (1 + H^*) + \frac{(\gamma_0')'}{\gamma_0'} \right], \quad Q(x) = \rho_w U_e A. \quad (3.180)$$

Интегрируя уравнение (3.179), получим

$$z = \exp \left[- \int_{x_t}^x P(x) dx \right] \left\{ \int_{x_t}^x Q(x) \exp \left[\int_{x_t}^x P(x) dx \right] dx + C \right\}. \quad (3.181)$$

Здесь x_t — координата точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Постоянную интегрирования C определим, как обычно, из условия срачивания толщин потери импульса δ^{**} в точке перехода. В результате получим

$$z = \exp \left[- \int_{x_t}^x P(x) dx \right] \left\{ \int_{x_t}^x Q(x) \exp \left[\int_{x_t}^x P(x) dx \right] dx + \rho_{et} U_{et} \delta_t^{**} \right\}, \quad (3.182)$$

причем параметры ζ_t и δ_t^{**} должны быть определены по теории ламинарного пограничного слоя.

Если ламинарный участок отсутствует (при $x_t = 0$, $\delta_t^{**} = 0$), то равенство (3.182) несколько упрощается и принимает вид

$$z = \exp \left[- \int_0^x P(x) dx \right] \int_0^x Q(x) \exp \left[\int_0^x P(x) dx \right] dx. \quad (3.183)$$

Квадратуры, входящие в выражения (3.182) и (3.183), определяются численным или графическим интегрированием.

При обтекании плоской пластины под нулевым углом атаки ($dU_e/dx = 0$, $\gamma = 0$) равенство (3.183) с учетом соотношений (3.180) приводится к форме

$$z = \rho_e U_e \int_0^x A dx = \rho_e U_e \int_0^x [1 + 2/(\kappa \zeta I(1))] dx. \quad (3.184)$$

В случае течения несжимаемой жидкости, если воспользоваться

для A выражением (3.177), интеграл в правой части выражения (3.184) легко вычисляется, после чего будем иметь

$$z_0 = \rho_e U_e x (1 + 0,62 Re_x^{-1/4}). \quad (3.185)$$

При изменении числа Рейнольдса (Re_x) от 10^5 до 10^7 выражение в круглых скобках в равенстве (3.185) изменяется от 1,27 до 1,20. Следовательно, с достаточной степенью точности можно принять, что

$$z_0 = 1,24 \rho_e U_e x. \quad (3.186)$$

После определения по соотношению (3.182) или (3.183) распределения параметра $z(x)$ по поверхности тела, можно по формуле (3.175) найти зависимость параметра трения ζ от продольной координаты, а затем с помощью равенства (3.57) и коэффициент трения c_f . Однако непосредственное использование равенства (3.175) связано с неудобствами, обусловленными необходимостью решения логарифмического уравнения. Чтобы упростить процесс расчета трения, проведем некоторые преобразования выражения (3.175).

Логарифмируя зависимость (3.175) и переходя затем с помощью соотношения (3.57) от ζ и c_f , получим

$$\begin{aligned} & x \sqrt{2} (\lg e) (\rho_w / \rho_e)^{1/2} I(1) c_f^{-1/2} + 2 \lg (c_f^{-1/2}) = \\ & = \zeta_3 + \lg (\rho_e z / (\rho_w \mu_w)), \quad \zeta_3 = \lg \zeta_2. \end{aligned}$$

Производя в этом равенстве простые вычисления и вводя обозначение

$$K = \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_e}} I(1), \quad (3.187)$$

будем иметь

$$\frac{0,242 K}{\sqrt{c_f}} + 2 \lg \frac{1}{\sqrt{c_f}} = \zeta_3 + \lg \left(\frac{\rho_e z}{\rho_w \mu_w} \right). \quad (3.188)$$

Величину постоянной ζ_3 определим из условия совпадения формулы (3.188) с формулой Кармана (3.101) для плоской пластины в несжимаемой жидкости. Принимая во внимание соотношение (3.186) и производя сопоставление равенств (3.188) и (3.101), найдем, что $\zeta_3 = 0,30$. Уравнение (3.188) можно свести к уравнению с одним параметром. Разделив обе части этого уравнения на два и добавив затем к обеим частям $\lg(0,121 K)$, получим

$$N + \lg N = -0,767 + \lg \left(K \sqrt{\frac{\rho_e z}{\rho_w \mu_w}} \right), \quad (3.189)$$

где

$$N = 0,121 K (c_f)^{-1/2}. \quad (3.190)$$

Разрешая равенство (3.190) относительно c_f , будем иметь

$$c_f = (0,121 K/N)^2. \quad (3.191)$$

Определение функции N из уравнения (3.189) по известной правой части этого уравнения легко может быть выполнено при помощи таблицы десятичных логарифмов.

Еще большего упрощения методики расчета можно достичь заменой левой части уравнения (3.189) более простым приближенным выражением. Как показали расчеты, в диапазоне изменения величины N от 1 до 4 (что при обтекании плоской пластины соответствует изменению чисел Рейнольдса, Маха и температурного фактора в пределах: $10^5 \leq Re_x \leq 10^8$; $0 \leq M_e \leq 10$; $0,1 \leq T_w/T_e \leq 1$), левая часть равенства (3.189) с достаточной степенью точности может быть представлена в виде

$$N + \lg N = 0,15 + 1,2 N. \quad (3.192)$$

Максимальная ошибка при таком приближении составляет 5% при $N = 1$, в среднем же ошибка колеблется от 2 до 1%.

Используя соотношение (3.192), после несложных вычислений получим вместо зависимости (3.191) следующее выражение для коэффициента трения:

$$c_f = \left[0,145 K / \lg \left(0,242 K \sqrt{\frac{\rho_e z}{\rho_w \mu_w}} \right) \right]^2. \quad (3.193)$$

Заканчивая изложение метода расчета, отметим, что одна из определяющих трение функций N связана с z зависимостью, близкой к логарифмической. Это обстоятельство оправдывает принятый здесь приближенный способ определения z на основе линеаризации интегрального соотношения импульсов.

В заключение приведем вкратце перечень основных этапов расчета по изложенному методу.

1. По заданным параметрам внешнего потока $M_e(x)$ и $T_e(x)$ и условиям на стенке (T_w) по формулам (3.46) определяются величины $\beta(x)$ и $\omega(x)$.

2. По известным величинам $\beta(x)$ и $\omega(x)$ и местному числу Рейнольдса $Re_x = \rho_e U_e x / \mu_e$ по формуле (3.126) находится местный коэффициент трения на пластине $c_{f_{пл}}$, а затем по формуле (3.57) параметр трения $\tau_{пл}(x)$. Попутно определяются необходимые для дальнейшего функция $I(1)$ (равенство (3.96)) и величина $K(x)$ (формула (3.120)). Отношение плотностей ρ_w / ρ_e определяется по формуле (3.92), вязкость μ — по формуле (3.103).

3. По известным значениям $\beta(x)$, $\omega(x)$ и $\tau_{пл}(x)$ по формулам (3.97) и (3.176) определяются величины $N^*(x)$ и $A(x)$.

4. По формулам (3.180) вычисляются коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$. При этом значения $U_e(x)$, $U'_e(x)$, $\nu_0(x)$ и $\nu'_0(x)$ должны быть известны.

5. По соотношению (3.182) (или (3.183), если ламинарный и переходный участки пограничного слоя отсутствуют) определяется функция $Z(x)$. Квадратуры, входящие в выражение (3.182) (или в (3.183)), определяются численным интегрированием.

6. По формуле (3.193) определяется распределение местного коэффициента трения $c_f(x)$ вдоль поверхности тела. Если коэффициент трения определяется по более точной формуле (3.191), то предварительно необходимо из уравнения (3.189) по известной правой части определить функцию $N(x)$. Решение уравнения (3.189) проводится с помощью таблиц десятичных логарифмов.

В качестве исходных данных должны быть заданы следующие величины: $U_e(x)$, $U'_e(x)$, $\nu_0(x)$, $\nu'_0(x)$, $T_e(x)$ и T_w . Вместо величин $U_e(x)$ и $U'_e(x)$ можно задать связанные с ними соотношением (2.120) число Маха на внешней границе пограничного слоя M_e и его производную по продольной координате $M'_e(x)$.

По определенному в результате расчета распределению $c_f(x)$ можно найти коэффициент трения, вычисленный по параметрам набегающего потока

$$c_{f\infty} = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} = c_f \frac{\rho_e}{\rho_\infty} \left(\frac{U_e}{U_\infty} \right)^2. \quad (3.194)$$

Примеры расчетов по изложенному методу будут даны несколько позже.

1.7.3. Метод последовательных приближений. Основываясь на тех же исходных предположениях, что и в предыдущем методе, т.е. рассматривая лишь течения с умеренными продольными перепадами давления, можно предложить следующий метод расчета, основывающийся на простом преобразовании интегрального соотношения импульсов к форме, позволяющей рассчитывать трение методом последовательных приближений. Первоначально подобное преобразование было использовано в работе К.К. Федяевского и А.С. Гиневского [163] для расчета трения в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости, а затем применено для расчета трения в сжимаемом газе в работе [164].

Обратимся к уравнению импульсов (3.169). Вводя в это уравнение новую переменную

$$\theta = \rho_e U_e \int_{x_t}^x \left[\frac{U'_e}{U_e} (1 + H^*) + \frac{(\nu_0')^2}{\nu_0^3} \right] dx, \quad (3.195)$$

приведем его к виду

$$\frac{d\theta}{dx} = e^{\Omega} \rho_w U_e / \eta^2. \quad (3.196)$$

Интегрируя уравнение (3.196) и возвращаясь затем от θ к θ^{**} , получим

$$\rho_e U_e \theta^{**} = e^{-\Omega} \left(\int_{x_t}^x (e^{\Omega} \rho_w U_e / \zeta^2) dx + \rho_{et} U_{et} \theta_t^{**} \right), \quad (3.197)$$

где индекс t означает параметры в точке перехода ламинарного слоя в турбулентный, причем величина θ_t^{**} определяется по теории ламинарного слоя.

Подставив теперь выражение для толщины потери импульса (3.174) в левую часть (3.197), будем иметь

$$C_2 \mu_w \exp [\eta \zeta I(1)] = e^{-\Omega} \left(\int_{x_t}^x (e^{\Omega} \rho_w U_e / \zeta^2) dx + \rho_{et} U_{et} \theta_t^{**} \right). \quad (3.198)$$

Производя в (3.198) логарифмирование и переходя затем с помощью равенства (3.57) от ζ к C_f , получим после несложных преобразований соотношение

$$0,242 K C_f^{-1/2} = C_3 + E, \quad (3.199)$$

где K определяется равенством (3.120), а функция E , содержащая в себе неизвестный коэффициент трения C_f , имеет вид

$$E = \lg \left[\frac{e^{-\Omega}}{\mu_w} \left(\frac{1}{2} \int_{x_t}^x e^{\Omega} \rho_e U_e C_f dx + \rho_{et} U_{et} \theta_t^{**} \right) \right]. \quad (3.200)$$

Значение постоянной C_3 следует принять таким же, как и в предыдущем методе, т.е. $C_3 = 0,3$. Имея это в виду, нетрудно получить из соотношения (3.199) следующее выражение для коэффициента трения:

$$C_f = \left(\frac{0,242 K}{0,3 + E} \right)^2. \quad (3.201)$$

В случае отсутствия ламинарного и переходного участков пограничного слоя ($x_t = 0$, $\theta_t^{**} = 0$) выражение для функции E упрощается и принимает вид

$$E = \lg \left[\frac{1}{2} \frac{e^{-\Omega}}{\mu_w} \int_0^x C_f \rho_e U_e e^{\Omega} dx \right]. \quad (3.200a)$$

Показатель экспоненты Ω , выражающийся вторым из равенств (3.195), содержит параметр

$H^* = \delta^*/\delta^{**}$. Расчет этого параметра, так же как и в предыдущем методе, может быть проведен по формуле (3.97).

Уравнение (3.201) позволяет использовать для расчета трения метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения для коэффициента трения c_f естественно принять ве-

личину этого коэффициента на плоской пластине, т.е. $c_f^0 = c_{f,пл}$. Расчет величины $c_{f,пл}$ при заданных параметрах на внешней границе пограничного слоя может быть проведен по методу, изложенному в § 14. После определения $c_f^0(x)$, последовательно определяются величины: $\zeta(x)$ с помощью равенства (3.57), H^* по формуле (3.97), $\Omega(x)$ по формуле (3.195), $E(x)$ по соотношению (3.200) (или (3.200a)) и, наконец, $c_f^{(1)}(x)$ по выражению (3.201) и т.д.

То обстоятельство, что неизвестная функция c_f входит в правую часть уравнения (3.201) под знаками интеграла и логарифма, обеспечивает обычно быструю сходимость итерационного процесса.

17.4. Примеры расчета. Приводимые ниже примеры расчетов имеют целью продемонстрировать возможности изложенных двух методов.

На рис. 37 приведены результаты расчета методом последовательных приближений местного коэффициента трения c_f на плоской пластине, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости со скоростью $U_\infty = 33$ м/с (сплошная кривая). Там же штриховой линией обозначена кривая $c_f(x)$, полученная по формуле Л.В. Козлова [128] (вторая из формул (3.121)). Кружками отмечены опытные данные Либби и др. [165].

На рис. 38, а и б представлены результаты расчета (тем же методом) трения в потоке несжимаемой жидкости при положительных перепадах давления (сплошная кривая) и опытные данные Н.И. Константинова [166] (штрихпунктиром показано распределение скорости на внешней границе пограничного слоя). Из сравнения кривых видно, что вблизи точки отрыва ($c_f = 0$) начинается отход расчетных кривых от экспериментальных. Ясно, что подобное расхождение является следствием принятых при построении метода допущений; прежде всего следствием его "однопараметричности".

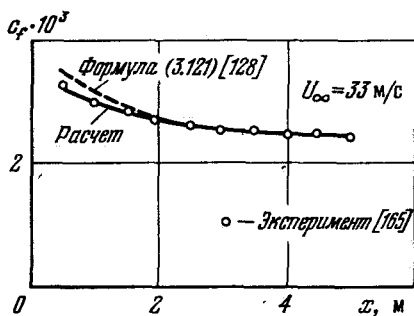


Рис. 37.

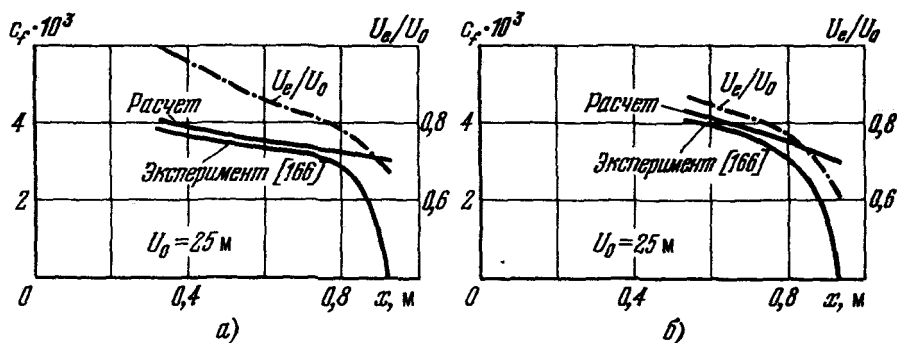


Рис. 38.

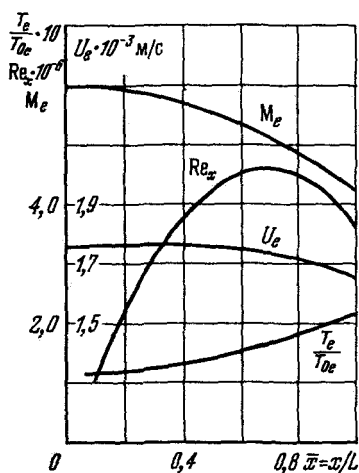


Рис. 39.

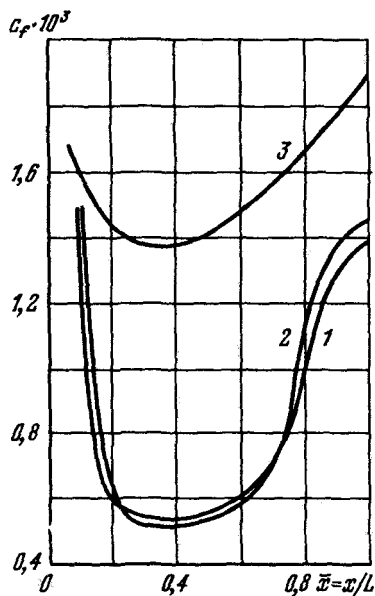


Рис. 40.

На рис. 39, 40 изображены распределения параметров во внешнем потоке и распределения $c_f(x)$, полученные методами линеаризации уравнения импульсов и последовательных приближений. Во внешнем потоке и на стенке имели место следующие условия:

$$M_\infty = 6, \quad M_e = M_\infty(1 - 0.3\bar{x}^2), \quad p_\infty = 0.0563 \text{ кгс/см}^2, \quad T_\infty = 216 \text{ К},$$

$$T_w = 700 \text{ К. На рис. 40 использованы обозначения: 1 - метод}$$

линеаризации, 2 - метод последовательных приближений, 3 - плоская пластина. Как следует из рис. 40, оба метода приводят к близким результатам.

§ 18. ТРЕНИЕ НА СФЕРЕ, ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

18.1. Общие замечания. Среди тел с различной формой головной части наибольший интерес инженеров и исследователей привлекали и продолжают привлекать тела со сферической поверхностью. Этот интерес обусловлен широким применением тел затупленной формы в практике строительства различных летательных аппаратов. Одно из главных преимуществ затупленных тел перед заостренными заключается в том, что удельные тепловые потоки к телам затупленной формы оказываются существенно меньшими, чем к заостренным.

В настоящее время проблема течения в ламинарном пограничном слое в окрестности передней критической точки затупленных тел при сверхзвуковых скоростях изучена весьма обстоятельно и теоретически и экспериментально [167–170]. Для этого режима течения оказывается, что тепловой поток к стенке (q_w) обратно пропорционален корню квадратному из радиуса затупления (R): $q_w \sim 1/\sqrt{R}$.

Значительно менее изучены свойства турбулентных пограничных слоев на затупленных телах в сверхзвуковых потоках. Объясняется это тем, что в передней критической точке и ее ближайшей окрестности режим течения в пограничном слое ввиду малости чисел Рейнольдса всегда остается ламинарным. Если ламинарный характер течения сохраняется и дальше по контуру тела, то максимальной величины тепловые потоки достигают в передней критической точке. Имеющиеся опытные данные, однако, показывают, что ламинарный характер течения в пограничном слое на затупленных телах сохраняется далеко не всегда. В частности, опытные данные Стетсона [171] свидетельствуют о возможности перехода ламинарного слоя в турбулентный в окрестности звуковой точки (линии) (звуковой точкой (линией) называется точка (линия), в которой скорость на внешней границе пограничного слоя становится равной местной скорости звука). В этом случае максимальный тепловой поток имеет место в окрестности звуковой точки (линии) (подробно теплообмен на затупленных телах рассматривается в § 20). Это обстоятельство объясняет существование особого интереса к турбулентным пограничным слоям на затупленных телах.

18.2. Распределение скоростей во внешнем потоке. Из широкого класса тел с затупленной формой наиболее изучена картина течения вблизи тел со сферической поверхностью. Схематически картина течения вблизи сферы представлена на рис. 41. При обтекании сферического тела потоком со сверхзвуковой скоростью перед ним образуется отсоединенная ударная волна. Газ, проходя через прямую ударную волну в окрестности передней критической точки, тормозится до нулевой скорости и затем ускоряется вблизи тела, достигая на некоторой линии (звуковой линии) местной скорости звука. Как показывают опыт и теоретические расчеты, звуковая линия располагается вблизи точки с угловой координатой $\theta = 45^\circ$.

Теоретическое исследование потока вблизи передней критической точки сферы было, в частности, проведено Ли Тин-и и Гейгером [172], а

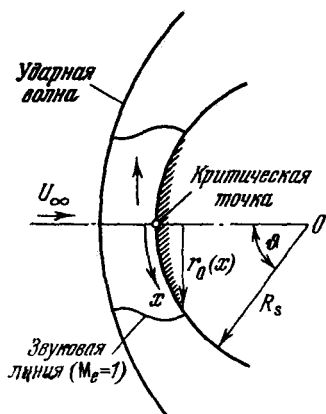


Рис. 41.

экспериментальное — Коробкиным и Грюневальдом [173]. В результате исследования Ли Тин-и и Гейгер нашли, что градиент скорости внешнего потока в передней критической точке сферы равен

$$\beta_s = \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_s = \frac{U_\infty}{R_s} \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho_s} \left(2 - \frac{\rho_\infty}{\rho_s} \right)}, \quad (3.202)$$

где R_s — радиус кривизны тела в передней критической точке, ρ_∞ — плотность газа в набегающем потоке (перед скачком уплотнения), ρ_s — плотность газа в передней критической точке.

При определении отношения плотностей ρ_s/ρ_∞ необходимо последовательно учесть процесс ударного сжатия в прямом скачке уплотнения (параметры на скачке меняются от значений M_∞ , ρ_∞ — перед скачком до значений M_2 , ρ_2 — за скачком) и последующего адиабатического и изоэнтропического торможения в стружке тока, приходящей в переднюю критическую точку (в процессе сжатия параметры меняются от M_2 , ρ_2 до $M_s = 0$, ρ_s). С учетом этих процессов будем иметь

$$\frac{\rho_s}{\rho_\infty} = \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{(\gamma-1)M_\infty^2+2} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\gamma-1)M_\infty^2+2}{2\gamma M_\infty^2-(\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (3.203)$$

В соотношении (3.203) множитель перед квадратной скобкой выражает отношение ρ_2/ρ_∞ , а квадратная скобка — отношение ρ_s/ρ_2 .

Результаты расчета параметра $2R_s\beta_s/U_\infty$ по формулам (3.202) — (3.203) приведены на рис. 42, там же представлены опытные данные Коробкина и Грюневальда [173]. Совпадение теории и эксперимента следует признать удовлетворительным.

При сравнительно больших числах Маха ($M_\infty > 4$) можно с достаточной точностью рассчитать значение параметра β_s , пользуясь приближением Ньютона [174]. В этом случае можно пренебречь вторым членом под радикалом в выражении (3.202). В результате будем иметь

$$\beta_s = \frac{U_\infty}{R_s} \sqrt{\frac{2\rho_\infty}{\rho_s}}, \quad (3.204)$$

где отношение ρ_s/ρ_∞ по-прежнему определяется из соотношения (3.203).

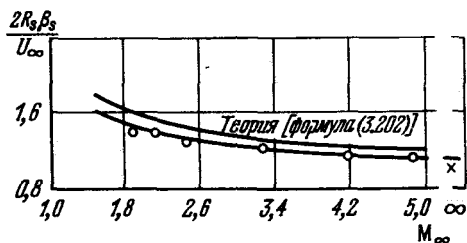


Рис. 42.

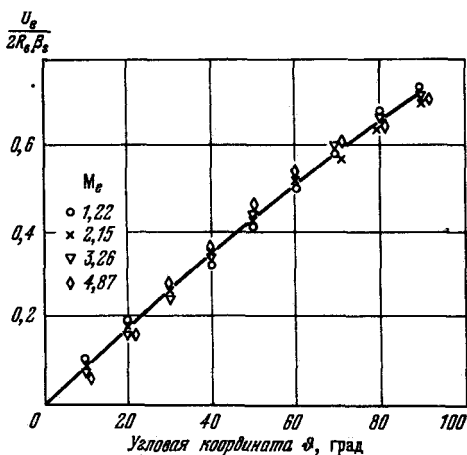


Рис. 43.

Справедливость приближения Ньютона подтверждается характером зависимости на рис. 42. С ростом числа Маха M_∞ параметр $2\beta_s R_s / U_\infty$ асимптотически стремится к некоторому предельному значению, зависящему от показателя адиабаты γ .

При расчете характеристик пограничных слоев на сфере интерес представляет не только величина градиента скорости в передней критической точке, но также изменение скорости потока вдоль поверхности сферы вообще и в окрестности звуковой точки в частности.

Опытные данные по распределению скорости вдоль сферы, полученные Коробкиным и Грюневальдом в диапазоне изменения чисел Маха набегающего потока от 1,22 до 4,87 (рис. 43), свидетельствуют о том, что зависимость скорости от продольной координаты близка к линейной: $U_e \sim x$. Градиент скорости вдоль поверхности сферы оказывается близким к значению этого градиента в критической точке. По оценке, проведенной Сибулкиным [175], различие в градиентах скорости в передней критической точке и звуковой точке не превышает 3% (при $\gamma = 1,4$). Эти данные позволяют сделать вывод о том, что при проведении приближенных рас-

четов распределение скорости потока вдоль поверхности сферы ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$) может быть описано линейной зависимостью

$$U_e = \beta_s x,$$

где β_s определяется формулами (3.202), (3.203). При более аккуратных расчетах можно воспользоваться данными, приведенными на рис. 43.

1.8.3. Расчет трения на сфере. Далее перейдем к расчету распределения трения вдоль поверхности сферы. Для этого можно воспользоваться любым из двух методов, рассмотренных в предыдущем параграфе, без каких-либо упрощений. Однако для приближенных оценок трения метод линеаризации уравнения импульсов можно несколько упростить, приняв предварительно некоторые упрощающие допущения относительно поведения параметра N^* и функции A . Будем считать эти величины постоянными. Из рассмотрения равенств (3.97) и (3.176) нетрудно убедиться в обоснованности принятого допущения. Действительно, как следует из результатов анализа, проведенного в предыдущем параграфе, величины N^* и A очень слабо зависят от параметра трения ξ . Поэтому можно ожидать, что если параметр сжимаемости β и параметр теплообмена ω (см. выражение (3.46)) мало меняются вдоль поверхности, то и функции N^* и A также мало меняются. Параметр сжимаемости β в рассматриваемом случае течения вблизи сферы будет невелик, так как числа Маха на внешней границе пограничного слоя не будут превышать значений $1,5 \div 3$. Сошлемся в связи с этим на уже упомянутый выше опытный факт, согласно которому число Маха M_e достигает значения, равного единице, в точке с угловой координатой $\theta = 45^\circ$. Следовательно, влияние параметра сжимаемости на величины N^* и A будет незначительным. Что касается параметра теплообмена, то его величина может оказаться достаточно большой. Однако если температура стенки постоянна, то изменение этого параметра вдоль поверхности сферы будет незначительным, так как температура на внешней границе пограничного слоя вблизи сферы изменяется мало. Таким образом, есть основания считать в рассматриваемом случае течения вблизи сферы величины N^* и A постоянными. Если, кроме того, приближенно принять, что $\gamma_0(x) \approx x$, то коэффициенты уравнения (3.179) $P(x)$ и $Q(x)$, определяемые равенствами (3.180), примут вид

$$P(x) = A(2 + N^*) \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \rho_w \beta_s A x. \quad (3.205)$$

Подставив значения этих коэффициентов в выражение для функции z (3.181), после вычисления квадратур найдем

$$z = \left(\frac{x}{x_t} \right)^{-A(2+N^*)} \left[\frac{\beta_s \rho_w A x_t^2}{A(2+N^*)+2} \left[\left(\frac{x}{x_t} \right)^{A(2+N^*)+2} - 1 \right] + \rho_{et} U_{et} \xi_t^2 \delta_t^{**} \right]. \quad (3.206)$$

Если ламинарный и переходный участки пограничного слоя отсутствуют

($x_t = 0$, $U_{et} = 0$), то равенство (3.206) несколько упрощается и принимает вид

$$z = \frac{\beta_s \rho_w A}{A(2+H^*)+2} x^2. \quad (3.207)$$

Имея зависимость $z(x)$, нетрудно по формулам (3.191) или (3.193) предыдущего параграфа рассчитать распределение коэффициента поверхностного трения $c_f(x)$.

Для полностью турбулентного пограничного слоя после подстановки зависимости (3.207) в формулу (3.193) можно получить следующее соотношение для местного коэффициента трения:

$$c_f = \frac{0,29 K}{[\lg \{0,0586 K^2 Re_x (\mu_e / \mu_w) A [A(2+H^*)+2]^{-1}\}]^2}, \quad (3.208)$$

где

$$Re_x = \frac{\beta_s \rho_e x^2}{\mu_e}, \quad (3.209)$$

а величины K , H^* и A определяются соответственно равенствами (3.120), (3.97), (3.176).

Для удобства проведения расчетов на рис. 44 представлена зависимость комплекса $A[A(2+H^*)+2]^{-1}$ от температурного фактора T_w/T_e для чисел Маха $M_e = 0; 2$. Характер и пределы изменения этого комплекса подтверждают правильность принятого допущения о постоянстве величин A и H^* . Следует отметить, что комплекс $A[A(2+H^*)+2]^{-1}$ зависит не только от параметров T_w/T_e и M_e , но также и от числа Рейнольдса. Однако эта зависимость оказывается чрезвычайно слабой, поэтому представленными на рис. 44 графиками (они построены для $Re_x = 10^7$) можно с большой степенью точности пользоваться в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса ($\sim$ от 10^5 до 10^9).

18.4. Примеры расчета. На рис. 45 и 46 приведены результаты расчета распределений некоторых параметров и местных коэффициентов трения на поверхности сферы для различных условий течения.

Расчеты, результаты которых представлены на рис. 45, проведены для условий обтекания сферы диаметром $d = 2$ м потоком воздуха с числом Маха $M_\infty = 3$ на высоте 20 км (по стандартной атмосфере). Поверхность сферы предполагалась теплоизолированной. На этом рисунке приведены, в частности, распределения чисел Маха

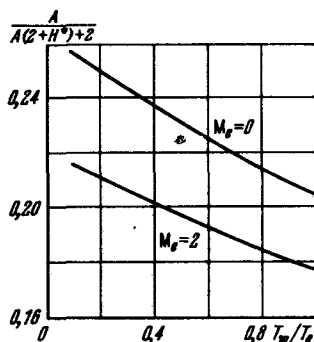


Рис. 44.

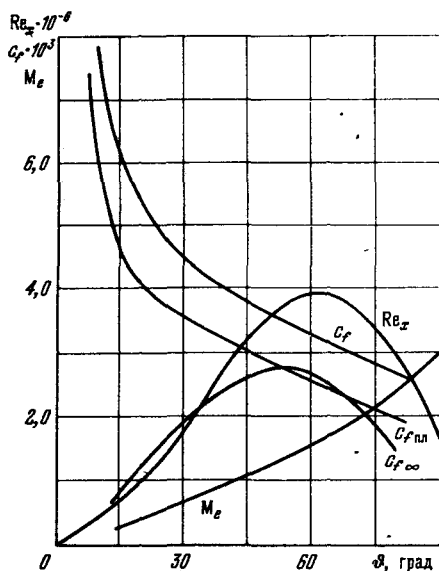


Рис. 45.

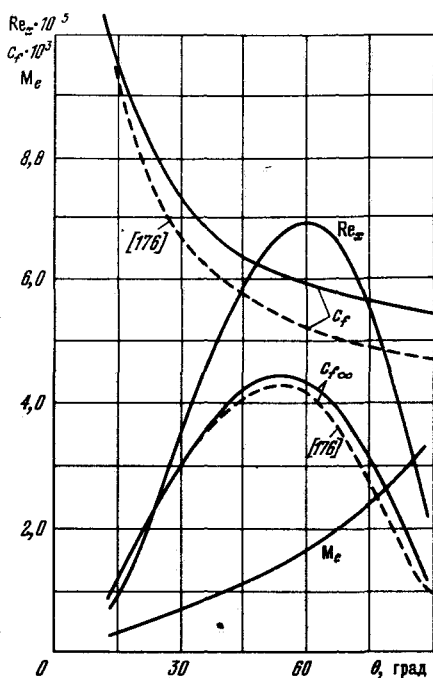


Рис. 46.

M_e и чисел Рейнольдса Re_x (см. формулу (3.209)) на внешней границе пограничного слоя. Характерным для изменения числа Рейнольдса является наличие максимума, обусловленного тем, что на начальном участке преобладающим фактором, определяющим рост числа Рейнольдса, является увеличение продольной координаты x , а на конечном участке таким фактором оказывается плотность газа ρ , резко уменьшающаяся в результате изэнтропического расширения потока вдоль поверхности сферы. На рис. 45 приведены также распределения местных коэффициентов трения на поверхности сферы C_f (см. формулу (3.208)) и $C_{f\infty}$ (см. формулу (4.194)). Там же изображена кривая изменения коэффициента трения $C_{f_{пл}}$, рассчитанная по формулам плоской пластины для местных значений чисел Маха M_e и Рейнольдса Re_x на внешней границе пограничного слоя.

На рис. 46 представлены аналогичные результаты (сплошные кривые), полученные при расчете обтекания сферы диаметром $d = 1,07$ м потоком с числом Маха $M_\infty = 11$ на высоте 25 км и при значении температурного фактора $T_w/T_{oe} = 0,327$ (T_{oe} — температура торможения). На том же рисунке приведены результаты расчетов (штриховые кривые), полученные Р.А. Сафаровым и Г.А. Тирским [176] путем численного интегрирования уравнений

турбулентного пограничного слоя, замкнутых с помощью трехслойной гипотезы Меллора [177]. Как видно из сравнения кривых $C_{f\tau}$ и $C_{f\infty}$, предложенный выше приближенный метод расчета, по-видимому, неплохо согласуется с точными решениями.

В заключение отметим, что в обоих рассмотренных случаях обтекания сферы местный коэффициент трения $C_{f\infty}$, определенный по параметрам набегающего потока (см. формулу (3.194)), оказывается максимальным в области течения, прилегающей к звуковой линии.

§ 19. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СИЛЬНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ДАВЛЕНИЯ [92]

19.1. Обоснования метода. Некоторые проблемы полуэмпирической теории турбулентности, возникающие при попытках предсказания свойств сильно неравновесных турбулентных пограничных слоев были достаточно подробно рассмотрены в п. 11.7 § 11. В частности, было показано, что в рамках двухслойной схемы пограничного слоя, согласно которой слой разбивается на область закона стенки (внутреннюю) и область закона следа (внешнюю), традиционное сращивание решений на границе этих областей по локальным значениям турбулентной вязкости приводит к неверному описанию масштаба (размера) внутренней области, что может в конечном счете привести к существенным погрешностям в расчете характеристик слоя, например, в предотрывной области.

Ниже излагается интегральный двухпараметрический метод, в основу которого положена двухслойная схема пограничного слоя.

Во внутренней области (области закона стенки) в качестве семейства профилей скорости используется семейство, получаемое на основе полуэмпирической гипотезы Прандтля пути перемешивания, модифицированной Ван-Дристом (подробно эта гипотеза рассмотрена в п. 11.3 § 11), и использования закона стенки. Параметром семейства профилей скорости во внутренней области является трение (коэффициент трения) на стенке.

Во внешней области (области закона следа) принимается однопараметрический профиль, получающийся из решения задачи (в приближении Озеена) о турбулентном перемешивании двух полубесконечных потоков и принятии для турбулентной вязкости гипотезы Клаузера (п. 11.5 § 11). Роль параметра семейства профилей во внешней области играет параметр спутности (отношение скоростей двух потоков).

В качестве условия сращивания используется интегральное сращивание по турбулентным касательным напряжениям.

Схема течения представлена на рис. 47. Схематическое сращивание двух семейств профилей скорости приведено на рис. 48.

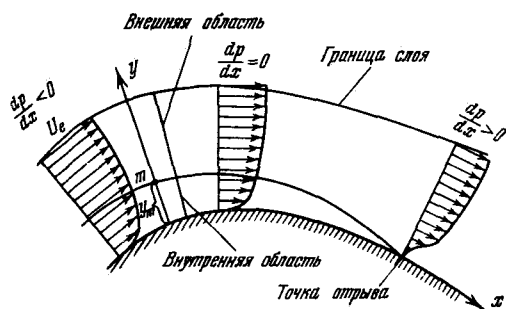


Рис. 47.

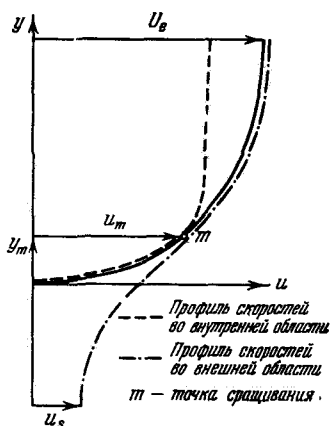


Рис. 48.

19.2. Интегральное срашивание по турбулентным касательным напряжениям. Как отмечалось в п. 11.6, проблема "срашивания" является составной частью более общей проблемы асимптотической теории турбулентного пограничного слоя. Попытки формального применения метода срашиваемых асимптотических разложений к описанию турбулентных пристенных течений уже предпринимались (достаточно полную библиографию по этому вопросу можно найти в обзоре Б.А. Кадера, А.М. Яглома [178]), однако существенных результатов в этом направлении пока не получено. В связи с этим выбор условия срашивания в большой степени продолжает оставаться скорее интуитивным, чем рациональным.

Поскольку турбулентные напряжения во внешней области неравно-весных пограничных слоев зависят не только от локальных характеристик, но и от предыстории потока, очевидно, что для определения масштаба внутренней области (y_m) необходимо использовать условие срашивания по какой-либо интегральной величине, учитывающей предысторию течения. Требование "интегральности" срашиваемой величины допускает известный произвол в ее выборе. В уже упоминавшейся работе Ривза [59] срашивание проводилось по интегральным значениям турбулентного напряжения трения на границе внутренней и внешней областей. Сущность этого условия сводится к равенству касательных напряжений, полученных из уравнения движения путем его интегрирования поперек пограничного слоя от стенки и внешней границы пограничного слоя до границы стыковки соответственно. Ниже используется подбное же условие, однако с несколько иной его детализацией.

Запишем уравнения неразрывности и движения (первое и второе уравнения системы (3.22) для плоского течения ($\nabla = 0$) в переменных законах стенки. Для этого осуществим в указанных уравнениях переход от переменных x, y к переменным $\xi = x,$

$\eta = \psi v_* / \gamma$ ($v_* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$). Формулы перехода, очевидно, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\eta}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (3.210)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{v_*}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Используя соотношения (3.210), преобразуем уравнения неразрывности и движения к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\eta}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{v_*}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad (3.211)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho \left(u \frac{\eta}{v_*} \frac{dv_*}{dx} + v \frac{v_*}{\gamma} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \frac{dp}{dx} + \frac{v_*}{\gamma} \frac{\partial \tau}{\partial \eta}. \quad (3.212)$$

Применяя к уравнению неразрывности (3.211) "закон стенки" $u/v_* = \psi(\eta)$, преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\gamma}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \frac{d}{d\eta} (\psi \eta). \quad (3.213)$$

Интегрируя уравнение (3.213) по η от 0 до η и используя граничные условия $\psi = 0$, $v = v_w$ при $\eta = 0$, получим (условие $v = v_w$ принято для общности)

$$v = v_* - \frac{\gamma}{v_*} \frac{dv_*}{dx} \psi \eta. \quad (3.214)$$

Применение "закона стенки" к уравнению движения (3.212) с учетом соотношения (3.214) приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \rho v_* v_w \frac{d\psi}{d\eta} + \mu \psi^2 \frac{dv_*}{dx} + \frac{\mu}{\rho v_*} \frac{dp}{dx}. \quad (3.215)$$

Интегрируя уравнение (3.215) в пределах от 0 до η с использованием граничных условий $\tau = \tau_w$, $\psi = 0$ при $\eta = 0$, получим распределение касательного напряжения в области действия "закона стенки"

$$\tau = \tau_w + \rho v_w v_* \psi + \frac{\gamma \eta}{v_*} \frac{dp}{dx} + \mu \frac{dv_*}{dx} \int_0^\eta \psi^2 d\eta. \quad (3.216)$$

Напряжение трения на линии срачивания внутренней и внешней областей определяется из условия $\tau = \tau_m$ при $\eta = \eta_m$, т.е.

$$\tau_m = \tau(\eta_m - 0) = \tau_w + \rho v_w v_* \varphi_m + \frac{\eta_m}{v_*} \frac{dp}{dx} + \mu \frac{dv_*}{dx} \int_0^{\eta_m} \varphi^2 d\eta. \quad (3.217)$$

Для получения распределения τ во внешней области запишем уравнение движения в переменных x и y в дивергентной форме, используя при этом уравнения Бернулли и неразрывности; в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U_e - u)] + \frac{dU_e}{dx} (U_e - u) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (3.218)$$

Интегрируя (3.218) от y до ∞ и принимая во внимание граничное условие $\tau \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, найдем распределение напряжений трения во внешней области

$$\tau = \rho \left[-v(U_e - u) + \int_y^\infty \frac{\partial}{\partial x} [u(U_e - u)] dy + \frac{dU_e}{dx} \int_y^\infty (U_e - u) dy \right]. \quad (3.219)$$

Используя условие $\tau = \tau_m$ при $y = y_m$, получим из (3.219) значение напряжений трения на линии срачивания

$$\begin{aligned} \tau_m = \tau(y_m + 0) = & \rho \left[(U_e - u_m) \left(u_m \frac{dy_m}{dx} - v_m \right) + \right. \\ & \left. + \frac{dU_e}{dx} \int_{y_m}^\infty (U_e - u) dy + \frac{d}{dx} \int_{y_m}^\infty u(U_e - u) dy \right]. \end{aligned} \quad (3.220)$$

Приравнявая значения τ_m из равенств (3.217) и (3.220), получим соотношение, которое можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение для определения y_m . Это уравнение, разрешенное относительно производной dy_m/dx , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_m}{dx} = \Phi(x), \quad \Phi(x) = & \frac{1}{u_m(U_e - u_m)} \left[v_*^2 + v_w U_e - \right. \\ & - y_m(U_e - u_m) \frac{u_m}{v_*} \frac{dv_*}{dx} - y_m U_e \frac{dU_e}{dx} + \\ & \left. + \frac{dv_*}{dx} \int_0^{\eta_m} \varphi^2 d\eta - \frac{d}{dx} \int_{y_m}^\infty u(U_e - u) dy - \frac{dU_e}{dx} \int_{y_m}^\infty (U_e - u) dy \right]. \end{aligned} \quad (3.221)$$

Интегрируя уравнение (3.221), получим

$$y_m(x) = y_m(x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(x) dx. \quad (3.222)$$

Здесь x_0 — начальное сечение.

Соотношение (3.222) является основой для определения толщины (масштаба) внутренней области y_m , если известны распределения $U_e(x)$, $v_w(x)$, $v_*(x)$ и профили скоростей во внутренней и внешней областях.

Профили скоростей в каждой из двух областей могут быть либо получены путем интегрирования исходных дифференциальных уравнений, замкнутых с помощью тех или иных полуэмпирических гипотез турбулентности, либо заданы в виде одно- или многопараметрических семейств, подобно тому как это обычно делается в интегральных методах расчета. Важно подчеркнуть, что рассмотренный способ сращивания решений для двух областей совершенно не связан с конкретным выбором гипотез турбулентности, которые могут быть использованы при определении профилей скорости. Даже в том случае, когда используется такое естественное на первый взгляд дополнительное условие сращивания, как равенство производных от скорости по поперечной координате в точке сращивания $(\partial u / \partial y)_{y_m-0} = (\partial u / \partial y)_{y_m+0}$, сращивание по интегральным значениям турбулентного напряжения трения в рамках интегрального метода не эквивалентно традиционному сращиванию ($\mu_{\tau 1} = \mu_{\tau 0}$), поскольку из равенства

$$\frac{\tau(y_m-0)}{(\partial u / \partial y)_{y_m-0}} = \frac{\tau(y_m+0)}{(\partial u / \partial y)_{y_m+0}},$$

очевидно, совсем не следует равенство локальных значений турбулентной вязкости в точке сращивания.

19.3. Расчет турбулентного пограничного слоя на основе сращивания по интегральным значениям напряжений трения. Рассмотренный выше способ сращивания был использован в рамках интегрального метода для расчета характеристик неравновесных турбулентных пограничных слоев в несжимаемой жидкости при различных продольных перепадах давления на непроницаемой стенке ($v_w = 0$).

Во внутренней области использовался профиль, подобный профилю (2.156), с тем, однако, отличием, что напряжение трения τ в этой области не полагалось постоянным, а принималось равным его выражению (3.216). С учетом сказанного профиль скорости (2.156) принимает вид

$$\psi = \int_0^{\eta} \frac{2(\tau/\tau_w) d\eta}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 \eta^2} [1 - \exp(-\eta/A)]^2 (\tau/\tau_w)}. \quad (3.223)$$

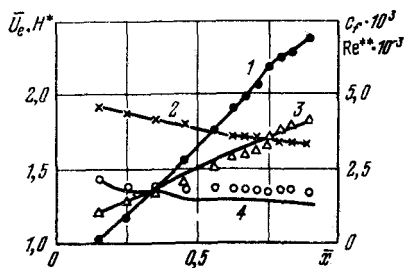


Рис. 49.

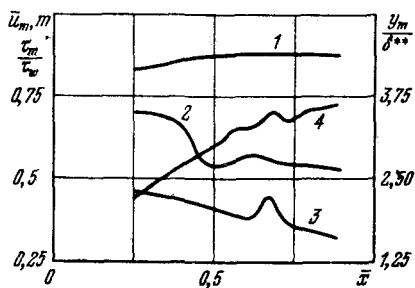


Рис. 50.

Здесь A – модифицированный Себеси демпфирующий множитель Ван-Дриста (2.170).

Во внешней области был принят для простоты однопараметрический профиль, выражающийся через "функцию ошибок",

$$\frac{u}{U_e} = 1 + \frac{(m-1)}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\xi^*}} \right) \right], \quad \xi^* = k \int_{x_0}^x \delta^* dx, \quad 0 \leq m \leq 1. \quad (3.224)$$

Профиль скоростей (3.224) получается при решении задачи о смешении двух полубесконечных потоков ($m = u_s / U_e$ – параметр спутности) в приближении Озеена и принятии для турбулентной вязкости гипотезы Клаузера (2.175) (схему срашивания см. рис. 48).

В точке срашивания использовались условия: непрерывности скорости ($u(y_m - 0) = u(y_m + 0)$) и ее производных $(\partial u / \partial y)_{y_m - 0} = (\partial u / \partial y)_{y_m + 0}$, а также (3.222). Определение трения на поверхности, как обычно, проводилось с помощью интегрального соотношения импульсов для слоя в целом.

Обратимся к результатам расчетов течений с продольным перепадом давления. Номера опытов, с которыми проводится сравнение, соответствуют их значениям, принятым в материалах стэнфордской конференции ([81], т. 2).

На рис. 49 приводятся распределения скорости во внешнем потоке $\bar{U}_e$ (кривая 1), коэффициента трения C_f (кривая 2), числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса Re^{**} (кривая 3), формпараметра H^* (кривая 4) на поверхности с сильным отрицательным перепадом давления (опыт 1300); $\bar{U}_e$ и $\bar{x}$ – безразмерные. Рис. 50 иллюстрирует зависимость безразмерных скорости $\bar{u}_m$ (кривая 1) и трения τ_m / τ_w (кривая 2) от продольной координаты. Там же представлены зависимости для параметра внешнего семейства профилей скорости (кривая 3) и относительной толщины пристеночного слоя y_m / δ^{**} (кривая 4). Из рис. 50 видно,

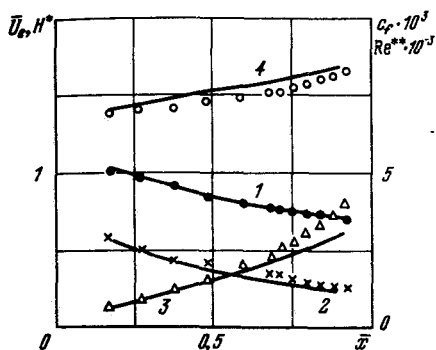


Рис. 51.

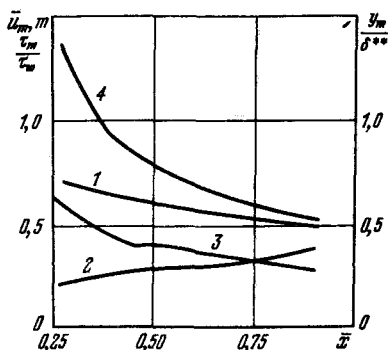


Рис. 52.

что пристеночная область пограничного слоя становится толще при ускорении внешнего потока. При этом величина y_m / δ^{**} достигает значения, близкого к 3,5. Для сравнения отметим, что при $10^6 \leq Re_x \leq 10^7$ на плоской пластине $y_m / \delta^{**} \approx 1,65 \div 1,9$, что соответствует значениям $y_m / \delta \approx 0,2$.

На рис. 51 и рис. 52 приводятся аналогичные кривые для течения с умеренным положительным перепадом давления (опыт 1100). Как видно из рис. 52, относительная толщина пристеночной области y_m / δ^{**} уменьшается до значения, равного 0,5, и составляет $\sim 30\%$ той же величины на пластине.

Отметим, что расчеты течения на пластине (опыт 1400, результаты здесь не приводятся) показали, что относительная толщина внутренней области в отсутствие продольного перепада давления постоянна ($y_m / \delta^{**} \approx 1,5$).

Приведенные данные о взаимодействии внутренней и внешней областей находятся в соответствии с современными представлениями о структуре турбулентного пограничного слоя.

Проведенный анализ и результаты расчетов убедительно свидетельствуют о том, что апробированный интегральный метод сращивания решений является более предпочтительным, чем метод сращивания по локальным значениям турбулентной вязкости. В то же время многие аспекты рассматриваемой проблемы остаются неясными. В частности, не очевидна процедура сращивания при использовании численных методов интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя, некоторые другие вопросы также остаются нерешенными. Ясно, что рассмотренный способ сращивания может быть в принципе обобщен на течение сжимаемого газа, однако и в этом случае круг нерешенных проблем не сужается. Поэтому содержание настоящего параграфа следует скорее рассматривать как попытку поставить проблему "сращивания", чем как ее достаточно универсальное решение.

§ 20. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

20.1. Общие соображения. Достаточно общая постановка задачи о расчете трения и теплообмена в турбулентном пограничном слое в газовом потоке была рассмотрена в § 13. Там же были даны некоторые рекомендации по выбору численных методов интегрирования уравнений пограничного слоя и приведены ссылки на соответствующую литературу.

С учетом очень широкого спектра требований, предъявляемых к расчетным методам, не потеряли своего значения до настоящего времени и приближенные интегральные методы расчета теплопередачи, в особенности основанные на использовании тех или иных форм аналогии между переносом тепла и количества движения. Эти методы отличаются высокой оперативностью и могут быть использованы во многих случаях для предварительных оценок тепловых нагрузок. Некоторые из этих методов будут рассмотрены ниже.

В общем случае безотрывного обтекания газовым потоком тела произвольной формы для расчета распределения коэффициента теплопередачи вдоль поверхности тела можно воспользоваться интегральным соотношением энергии (2.128), вывод которого был дан в § 9.

В частном случае обтекания непроницаемой стенки ($v_w = 0$) это уравнение принимает вид

$$\frac{d\delta_n^{**}}{dx} + \frac{U_e'}{U_e} (1 - M_e^2) \delta_n^{**} + \frac{(\gamma_0^2)'}{\gamma_0^2} \delta_n^{**} = \frac{q_w}{\rho_e U_e H_e}. \quad (3.225)$$

Здесь

$$\delta_n^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{H}{H_e}\right) dy, \quad (3.226)$$

— толщина потери энергии, q_w — тепловой поток на стенке.

Для использования соотношения (3.225) необходимо установить закон теплообмена, т.е. связь толщины потери энергии δ_n^{**} и теплового потока q_w .

Из выражения для толщины потери энергии (3.226), записанного в форме

$$\delta_n^{**} = \int_0^{U_e} \frac{\rho u}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{H}{H_e}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1} du, \quad (3.227)$$

видно, что для вычисления интеграла в правой части (3.227) необходимо иметь зависимости $\rho(u)$, $H(u)$, $\partial u / \partial y = f(u)$. Определение этих зависимостей в общем не связано с какими-либо принципиальными трудностями, однако требует известной аккуратности и осмотрительности. Если при решении динамической задачи (рас-

чет трения) вполне удовлетворительные результаты были, например, получены на плоской пластине (§ 14) с использованием интеграла Крокко (3.45), то при решении тепловой задачи требуется более строгое описание поля температур в пограничном слое, в частности учет отличия так называемого суммарного числа Прандтля от единицы. Ниже этот вопрос будет рассмотрен подробно, однако прежде укажем на другой подход к определению теплового потока, основывающийся на использовании аналогии между трением и теплопередачей.

Удельный тепловой поток между газом и стенкой в соответствии с законом Фурье может быть представлен в виде

$$q_w = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (3.228)$$

Переходя в этом равенстве от температуры к энтальпии ($h = \int_0^T c_p dT$)

и совершая простые преобразования, будем иметь

$$q_w = \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w = \frac{\tau_w}{Pr_w} \frac{h_e}{U_e} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{u}} \right)_w. \quad (3.229)$$

Здесь

$$\bar{h} = h/h_e, \quad \bar{u} = u/U_e. \quad (3.230)$$

Из соотношения (3.229) следует, что задача нахождения теплового потока сводится к определению трения τ_w на поверхности (методы расчета трения были подробно рассмотрены в §§ 14–18) и зависимости энтальпии h от скорости u . Подобная же зависимость $h(u)$ необходима, как отмечалось выше, при составлении закона теплообмена на основе равенства (3.227). Рассмотрим подробно один из возможных способов установления зависимости $h(u)$.

20.2. Связь между профилями энтальпии и скорости в пограничном слое плоской пластины при $Pr_\Sigma \neq 1$. Рассмотрим обтекание

плоской пластины однородным газовым потоком ($dp/dx = 0$).

Уравнение энергии в переменных Крокко (3.40) в этом случае приобретает вид

$$\eta \frac{\partial h}{\partial \xi} = \frac{\tau_\Sigma}{\mu_\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau_\Sigma}{Pr_\Sigma} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \tau_\Sigma - \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right]. \quad (3.231)$$

Здесь $\eta = \eta(x, y)$.

Далее примем упрощающее допущение о том, что энтальпия h является функцией только скорости u и не зависит от продольной координаты ξ , т.е. $h = h(\eta)$ [179]. В обоснование этого допущения, которое можно назвать допущением о локальном подоби, можно заметить, что оно строго выполняется, если суммарное число Прандтля равно единице (определение числа Pr_Σ см. п. 13.2).

В этом случае, как известно, имеет место интеграл Крокко (3.45) (отметим, что необходимым условием существования интеграла Крокко является условие постоянства энтальпии на стенке и внешней границе пограничного слоя). Следовательно, можно ожидать, что при небольших отклонениях числа Pr_Σ от единицы и слабом изменении энтальпии на границах пограничного слоя зависимость энтальпии от продольной координаты окажется незначительной. Приняв указанное допущение ($\partial h / \partial \xi = 0$) и возвращаясь для удобства от переменной η к u , преобразуем (3.231) к виду

$$\left(\frac{\bar{h}'}{Pr_\Sigma}\right)' + (1 - Pr_\Sigma) \frac{\bar{\tau}'}{\bar{\tau}} \left(\frac{\bar{h}'}{Pr_\Sigma}\right) = -\frac{U_e^2}{h_e}. \quad (3.232)$$

Здесь $\bar{\tau} = \tau / \tau_w$, $\bar{h} = h / h_e$, а штрих обозначает производную по безразмерной скорости $\bar{u} = u / U_e$.

Граничные условия для уравнения (3.232) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \bar{h}_w \quad \text{при} \quad \bar{u} = 0, \\ \bar{h} &= 1 \quad \text{при} \quad \bar{u} = 1. \end{aligned} \quad (3.233)$$

Интегрируя уравнение (3.232) один раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{h}'}{Pr_\Sigma} &= \exp \left\{ \int_1^{\bar{\tau}} (1 - Pr_\Sigma) \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}} \right\} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\bar{h}'}{Pr_\Sigma} \right)_w - \frac{U_e^2}{h_e} \int_0^{\bar{u}} \exp \left(\int_1^{\bar{\tau}} (1 - Pr_\Sigma) \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}} \right) d\bar{u} \right]. \end{aligned} \quad (3.234)$$

Интегрирование (3.234) приводит к соотношению

$$\bar{h}(\bar{u}) = \bar{h}_w + \frac{(\bar{h}')_w}{Pr_\Sigma S(\bar{u})} - \frac{U_e^2}{h_e} R(\bar{u}), \quad (3.235)$$

где

$$S(\bar{u}) = \left\{ \int_0^{\bar{u}} Pr_\Sigma \exp \left[- \int_1^{\bar{\tau}} (1 - Pr_\Sigma) \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}} \right] d\bar{u} \right\}^{-1}, \quad (3.236)$$

$$\begin{aligned} R(\bar{u}) &= \int_0^{\bar{u}} Pr_\Sigma \exp \left[- \int_1^{\bar{\tau}} (1 - Pr_\Sigma) \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}} \right] \times \\ &\times \left\{ \int_0^{\bar{u}} \exp \left[\int_1^{\bar{\tau}} (1 - Pr_\Sigma) \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}} \right] d\bar{u} \right\} d\bar{u}. \end{aligned} \quad (3.237)$$

Принимая во внимание второе из граничных условий (3.233), найдем из равенства (3.235) производную $(\bar{h})'_w$, необходимую для определения теплового потока:

$$(\bar{h}')_w = Pr_\Sigma S(1) \left[1 - \bar{h}_w + \frac{U_e^2}{h_e} R(1) \right]. \quad (3.238)$$

Подставляя выражение (3.238) в соотношения (3.234) и (3.229), будем иметь

$$\bar{h}(\bar{u}) = \bar{h}_w + (\bar{h}_w - 1) \frac{S(1)}{S(\bar{u})} + \frac{U_e^2}{h_e} \left[\frac{S(1)}{S(\bar{u})} R(1) - R(\bar{u}) \right], \quad (3.239)$$

$$q_w = -\tau_w S(1) \left[h_e + 2R(1) \frac{U_e^2}{2} - h_w \right] \frac{1}{U_e}. \quad (3.240)$$

Равенство (3.239) выражает зависимость профиля энтальпии от профиля скоростей при числах $Pr_\Sigma \neq 1$. Для определения функций $S(\bar{u})$ и $R(\bar{u})$, как это следует из соотношений (3.236), (3.237), помимо числа Pr_Σ , необходимо знание распределения касательных напряжений τ поперек пограничного слоя.

В работе Ван-Дриста [179], из которой заимствован приведенный анализ, на основе соотношения (3.239) с использованием трехслойной кармановской схемы и линейного распределения $\tau(y)$ поперек слоя было показано, что на теплоизолированной поверхности при числах $Pr_\Sigma < 1$ вблизи внешней границы слоя имеет место

"всплеск" температуры торможения: температура торможения оказывается несколько больше температуры торможения во внешнем потоке. В дальнейшем существование этого "всплеска" было подтверждено экспериментально. В связи с этим сошлемся на одну из экспериментальных работ последнего времени [180]. В работе Лейдермана [180] были проведены измерения профилей скорости и температуры в турбулентном пограничном слое при числе Маха $M_\infty = 3$ и пренебрежимо малом продольном перепаде давления.

На рис. 53-55, заимствованных из работы [180], приведены результаты измерений профилей полной температуры T_0 при различных

значениях отношения температуры стенки T_w и температуры торможения во внешнем потоке T_{0e} . По осям абсцисс на этих рисунках отложена безразмерная скорость $\bar{u} = u/U_e$, по осям ординат отложен безразмерный комплекс $T^* = (T_0 - T_w) / (T_{0e} - T_w)$. Опытные точки, полученные в разных сечениях слоя, обозначены (о сплошных кривых будет сказано ниже).

Как следует из рис. 53, на котором приведены опытные данные на теплоизолированной поверхности, вблизи внешней границы

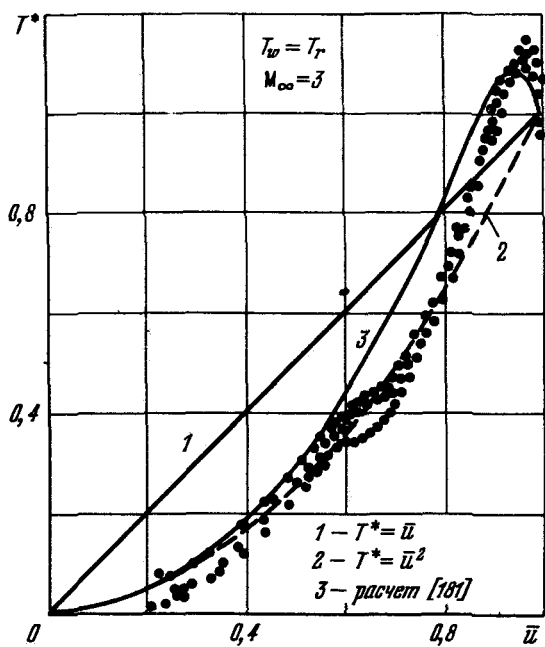


Рис. 53.

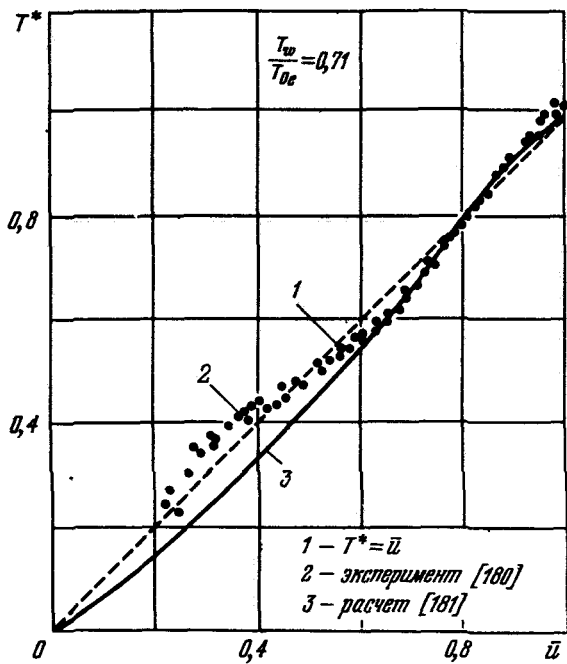


Рис. 54.

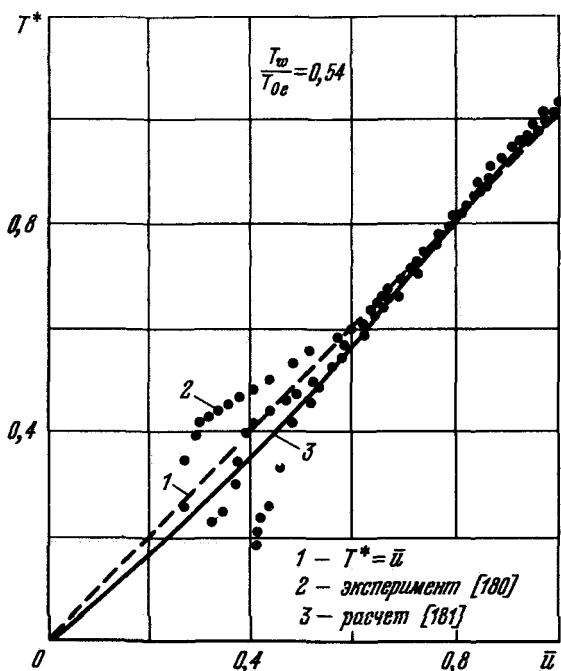


Рис. 55.

слоя имеет место предсказанный теорией "всплеск" температуры торможения.

Кривые, отмеченные номерами 1 и 2 на рис. 53, соответствуют связи, даваемой интегралом Крокко $T^* = \bar{u}$ (кривые 1), и квадратичной зависимости $T^* = \bar{u}^2$ (кривые 2). Видно, что интеграл Крокко плохо описывает поле температур на теплоизолированной поверхности (рис. 53), но вполне удовлетворительно при наличии теплового потока (рис. 54-55) (о кривых 3 будет сказано ниже).

В работе Уитфилда и Хая [181] уравнение (3.232) было решено методом разложения в ряд по малому параметру $(1 - Pr_\Sigma)$

с использованием допущения о линейной связи турбулентных напряжений с кинетической энергией турбулентности. Это допущение вместе с экспоненциальной аппроксимацией для распределения кинетической энергии турбулентности поперек слоя приводит к выражению

$$\tau = \rho(u^2/v_*^2) \exp[-4(\eta/\delta)^{5/2}]. \quad (3.241)$$

Для установления необходимой связи $\tau(u)$ авторами [181] было еще принято допущение о степенной зависимости $\bar{u} = (\eta/\delta)^{1/m}$.

Граничные условия в задаче о течении у стенки с постоянной температурой имеют вид

$$\bar{h}(0) = \bar{h}_w, \quad \bar{h}(1) = 1.$$

Представляя решение уравнения (3.232) в виде ряда

$$\bar{h}(\bar{u}) = \bar{h}^{(0)} + (1 - Pr_{\Sigma}) \bar{h}^{(1)} + \dots,$$

подставляя этот ряд в уравнение (3.232) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $(1 - Pr_{\Sigma})$ получим

$$\frac{d^2 \bar{h}^{(0)}(\bar{u})}{d\bar{u}^2} = -A, \quad A = (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \quad (3.242)$$

в нулевом приближении,

$$\frac{d^2 \bar{h}^{(1)}}{d\bar{u}^2} = 4\alpha \bar{u}^{\alpha-1} \frac{d\bar{h}^{(0)}}{d\bar{u}} + \frac{1}{\bar{h}^{(0)}} \left(\frac{d\bar{h}^{(0)}}{d\bar{u}} \right)^2 + A, \quad \alpha = \frac{5}{2} m \quad (3.243)$$

в первом приближении.

Используя граничные условия

$$\bar{h}^{(0)}(0) = \bar{h}_w, \quad \bar{h}^{(0)}(1) = 1, \quad \bar{h}^{(1)}(0) = \bar{h}^{(1)}(1) = 0,$$

нетрудно получить окончательное решение

$$\begin{aligned} \bar{h}(\bar{u}) = & \bar{h}_w + (\bar{H}_{\infty} - \bar{h}_w) \bar{u} - \frac{1}{2} A \bar{u}^2 + \\ & + (1 - Pr_{\Sigma}) \left[\frac{4\alpha A \bar{u}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (1 - \bar{u}^{\alpha+1}) - \frac{4(\bar{H}_{\infty} - \bar{h}_w) \bar{u}}{(\alpha+1)} (1 - \bar{u}^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} A \bar{u} (1 - \bar{u}) - (1 - \bar{u}) f(0) + \bar{u} f(1) - f(\bar{u}) \right]. \end{aligned} \quad (3.244)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) = & (\Delta/A) [(\eta - \Delta) \ln |\eta - \Delta| - (\eta + \Delta) \ln |\eta + \Delta|], \\ \eta = & \bar{H}_{\infty} - \bar{h}_w - A \bar{u}, \quad \Delta = [2A \bar{h}_w + (\bar{H}_{\infty} - \bar{h}_w)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.245)$$

Для течения вблизи теплоизолированной стенки вместо граничного условия $\bar{h}(0) = \bar{h}_w$ используется условие $d\bar{h}/d\bar{u}|_{\bar{u}=0} = 0$. Решение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{h}(\bar{u}) = & 1 + \frac{1}{2} A (1 - \bar{u}^2) + (1 - Pr_{\Sigma}) \left[\frac{4\alpha A}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (1 - \bar{u}^{\alpha+2}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} A (1 - \bar{u}^2) + f(1) - f(\bar{u}) \right], \end{aligned} \quad (3.246)$$

где $f(\bar{u})$ по-прежнему выражается первым из равенств (3.245), но параметры η и Δ выражаются так:

$$\eta = -A \bar{u}, \quad \Delta = (2A \bar{H}_{\infty})^{1/2}. \quad (3.247)$$

Здесь и ранее $\bar{H}_{\infty} = H_{\infty} / h_{\infty} = 1 + \frac{1}{2} A$.

Решение для теплоизолированной поверхности (3.246) можно использовать для косвенного определения числа Pr_Σ . Основываясь на опытных данных по коэффициенту восстановления, согласно которым этот коэффициент постоянен и равен 0,88, авторы [181] использовали это значение коэффициента для определения числа Pr_Σ из соотношения (3.246). Результаты расчетов Pr_Σ при раз-

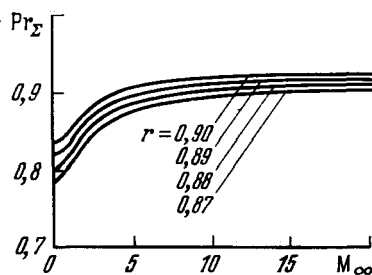


Рис. 56.

личных числах Маха M_∞ и $\gamma = 1,4$ приведены на рис. 56. На этом же рисунке приведены результаты расчетов для других значений коэффициента восстановления. Следует отметить, что полученные таким образом осредненные по сечению суммарные числа Прандтля Pr_Σ при относительно больших числах Маха близки к значению 0,9, принятому во многих работах.

Результаты расчетов зависимости температуры (комплекса $T^* = (T_0 - T_w) / (T_{0e} - T_w)$) от скорости при различных числах Маха на теплоизолированной поверхности приведены на рис. 57. Подобные же результаты для чисел Маха $M_\infty = 3$ и $M_\infty = 4$ представлены на рис. 53 и 58, соответственно (кривая 3); на рис. 58 приведены опытные данные Гейтса. Видно, что так же как на рис. 53, теоретическая кривая (кривая 3) неплохо согласуется с опытными данными, в то же время интеграл Крокко не позволяет, как отмечалось выше, во всех деталях описать распределение температуры в пограничном слое на теплоизолированной поверхности. Отмеченные особенности поведения полей температуры при числах $Pr_\Sigma \neq 1$ должны учитываться при построении методов расчета теплопередачи в турбулентных пограничных слоях.

20.3. Коэффициент восстановления. Параметр аналогии Рейнольдса. Тепловой поток. Возвращаясь к выражению для теплового потока (3.240), отметим, что величину

$$h_\eta = h_e + 2R(1) \frac{U_e^2}{2} \quad (3.248)$$

называют обычно равновесной энтальпией теплоизолированной поверхности или энтальпией восстановления. Множитель

$$\eta = 2R(1), \quad (3.249)$$

входящий в выражение для равновесной энтальпии (3.248), называется коэффициентом восстановления. Коэффициент восстановления характеризует отличие величины равновесной энтальпии H_η от энтальпии адиабатически и изэнтропически заторможенного газа $H_e = h_e + U_e^2/2$, иными словами, характеризует неадиабатичность процессов движения в пограничном слое.

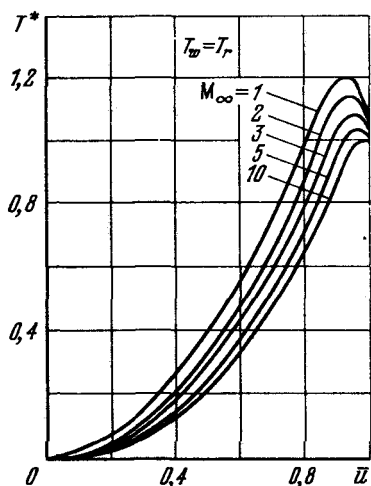


Рис. 57.

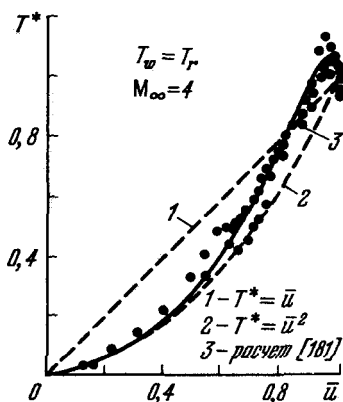


Рис. 58.

Для теоретического определения коэффициента восстановления, как это следует из равенств (3.249) и (3.237), необходимы данные о числе Прандтля Pr_Σ и распределении касательных напряжений поперек слоя $\bar{\tau}(\bar{u})$ (отметим, что соотношение (3.237) получено в предположении о постоянстве числа Pr_Σ). Существующие полуэмпирические методы расчета числа Pr_Σ (некоторые из них были рассмотрены в п. 13.2) не позволяют надежно определить это число; имеющиеся опытные данные по числу Pr_Σ характеризуются большим разбросом и также не могут быть использованы для сколь угодно широких обобщений. Известные трудности возникают и при расчете зависимости $\bar{\tau}(\bar{u})$. Все эти обстоятельства делают во многих случаях нецелесообразными попытки теоретического расчета коэффициента восстановления, хотя некоторые из попыток подобного рода были безуспешными (достаточно подробный обзор методов расчета коэффициента восстановления содержался в первом издании настоящей монографии [35]). Однако главным аргументом, подкрепляющим высказанный тезис, является "консервативность" коэффициента восстановления, проявляющаяся в его независимости от числа Маха M_∞ и числа Рейнольдса. Обширные опытные данные по коэффициенту восстановления, полученные разными авторами в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса и числа Маха ($0 \leq M_\infty \leq 6$) (обзор работ до 1967 г. приведен в [35]), свидетельствуют о том, что значения этого коэффициента лежат в довольно узких пределах

$$0,88 \leq \gamma \leq 0,90. \quad (3.250)$$

Эти значения коэффициента восстановления с достаточным основанием могут быть рекомендованы в практических расчетах.

Используя определенную равенством (3.248) энтальпию восстановления H_η , введем в рассмотрение безразмерный коэффициент теплопередачи (число Стантона)

$$c_h = \frac{q_{\eta w}}{\rho_e U_e (H_\eta - h_w)}. \quad (3.251)$$

Затем, используя выражение для местного коэффициента трения

$c_f = 2\tau_w / \rho_e U_e^2$, найдем из равенства (3.240) следующее соотношение:

$$\frac{2c_h}{c_f} = \S(1). \quad (3.252)$$

Величина $\S(1)$ называется параметром аналогии Рейнольдса.

Таким образом, для расчета местного теплового потока $q_{\eta w}$ необходимо знание коэффициента восстановления η , параметра аналогии Рейнольдса $\S(1)$ и местного коэффициента трения c_f :

$$q_{\eta w} = \frac{1}{2} c_f \rho_e U_e \S(1) \left(h_e + \eta \frac{U_e^2}{2} - h_w \right). \quad (3.253)$$

Выражение для параметра аналогии Рейнольдса, как это следует из равенств (3.252) и (3.236), имеет вид

$$\frac{2c_h}{c_f} = \left\{ \int_0^1 Pr_\Sigma \exp \left[- \int_1^{\bar{\tau}} (1 - Pr_\Sigma) \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}} \right] d\bar{\eta} \right\}^{-1} \quad (3.254)$$

В случае равенства числа Pr_Σ единице ($Pr_\Sigma = 1$), соотношение (3.254) приводит к так называемой классической аналогии Рейнольдса

$$\frac{2c_h}{c_f} = 1. \quad (3.255)$$

Попытки численного расчета параметра аналогии Рейнольдса по соотношению (3.254) сталкиваются с теми же трудностями, что и попытки расчета коэффициента восстановления (обзор работ до 1967 г. дан в [35]). Поэтому при оценках влияния различных факторов на этот параметр приходится приоритет отдавать опытным данным.

В работе Л.В. Козлова [182] на основе анализа экспериментов по непосредственному и одновременному измерению местных значе-

ний тепловых потоков и трения была предложена следующая зависимость параметра аналогии Рейнольдса от различных факторов:

$$\frac{2c_{hw}}{c_{fw}} = Pr_w^{-0,57} 0,695 Re_{xw}^{0,09-0,01 \lg Re_{xw}} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{-0,09} \quad (3.256)$$

Здесь индексом w , как обычно, обозначены величины, рассчитанные по условиям на стенке.

Формула (3.256) была получена Л.В. Козловым в следующем диапазоне изменения параметров: $1,7 \leq M_e \leq 4$; $5 \cdot 10^5 < Re_{xw} < 2 \cdot 10^7$; $0,5 \leq T_w/T_e \leq 1$. Влияние отдельных параметров на отношение $2c_h/c_f$ видно на рис. 59, на котором все кривые получены путем расчета по формуле (3.256), причем c_h и c_f определены по условиям на границе пограничного слоя.

Из рассмотрения рис. 59 следует, что с ростом чисел Маха и Рейнольдса M_e и Re_x величина $2c_h/c_f$ уменьшается, приближаясь к значениям, близким к единице.

Для грубых оценок параметра аналогии Рейнольдса можно использовать простые соотношения

$$\frac{2c_h}{c_f} = Pr^{-0,57} \quad \frac{2c_h}{c_f} = 1,22, \quad (3.257)$$

однако погрешность при этом может достигать 15–20 %.

В заключение отметим, что все приведенные выше данные по тепловым характеристикам турбулентного пограничного слоя относятся к "безградиентным" течениям (плоская пластина) и в лучшем случае могут быть использованы для анализа течений с небольшими продольными перепадами давления. Что касается течений с большими продольными перепадами давления, в частности течений в предотрывных областях, то здесь практически отсутствуют как опытные данные по теплопередаче, так и достаточно надежные полуэмпирические подходы, что связано, прежде всего, с недостаточностью изученности структуры таких течений и характера процессов переноса в них.

20.4. Расчет теплопередачи на сфере. Учитывая широкое практическое использование затупленных тел (тел со сферическим затуплением), рассмотрим методы расчета теплопередачи на таких телах.

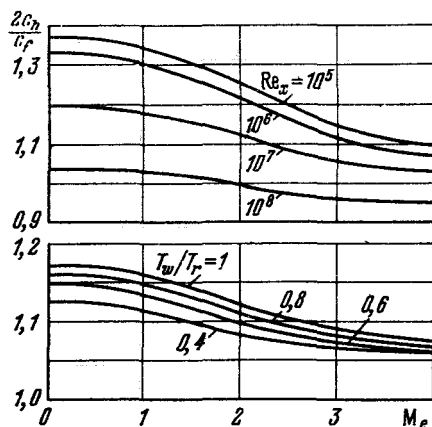


Рис. 59.

Имея в виду линейное распределение скорости на внешней границе пограничного слоя на сфере $U_e = \beta_s x$, где параметр β_s может быть определен по соотношениям (3.202), (3.203), запишем формулу для теплового потока (3.253) в виде

$$q_w = \frac{1}{2} c_f \rho_e \beta_s x \left(\frac{2c_h}{c_f} \right) \left(h_e + \frac{1}{2} \gamma \beta_s^2 x^2 - h_w \right). \quad (3.258)$$

Местный коэффициент трения c_f может быть рассчитан по методу, изложенному в § 18. Для оценок теплового потока на сфере, обтекаемой воздухом, можно принять $\gamma = 0,89$, $2c_h/c_f = 1,22$.

Наряду с изложенным существует целый ряд других приближенных методов расчета теплопередачи на сферических поверхностях. Результаты некоторых из них приводятся ниже.

Ван-Дрифт [183], используя степенной профиль скоростей с показателем степени $1/7$, получил следующее выражение для местного коэффициента теплопередачи:

$$c_{h\infty} = 0,042 Pr^{-2/3} \left(\frac{\beta_s d}{U_\infty} \right)^{4/5} \left(\frac{\rho_\infty U_\infty d}{\mu_\infty} \right)^{-1/5} \left(\frac{\rho_e}{\rho_\infty} \right)^{4/5} \left(\frac{\mu_e}{\mu_\infty} \right)^{1/5} \left(\frac{x}{d} \right)^{3/5}, \quad (3.259)$$

где d — диаметр сферы; при этом тепловой поток выражается равенством

$$q_w = c_{h\infty} \rho_\infty U_\infty (h_e - h_w).$$

Следует отметить, что формула (3.259) получена в предположении, что турбулентный пограничный слой начинается от передней критической точки.

Артур и Уильямс [184], используя формулу Ван-Дрифта (3.259), степенную зависимость вязкости от температуры $\mu \sim T^{0,76}$ и предположение об изэнтропическом расширении газа вдоль поверхности сферы, нашли, что в этом случае максимальное значение коэффициента теплопередачи $(c_{h\infty})_{\max}$ достигается в точке $x/d = 0,322$, что соответствует угловой координате $\theta = 37^\circ$. Максимальный тепловой поток при $Pr = 0,75$ оказывается равным

$$(q_w)_{\max} = 0,0195 \left(\frac{\beta_s d}{U_\infty} \right)^{4/5} \left(\frac{\rho_s}{\rho_\infty} \right)^{4/5} \left(\frac{\mu_s}{\mu_\infty} \right)^{1/5} \times \\ \times \left(\frac{\rho_\infty U_\infty d}{\mu_\infty} \right)^{-1/5} \rho_\infty U_\infty (h_e - h_w), \quad (3.260)$$

где индексом s обозначены параметры в передней критической точке.

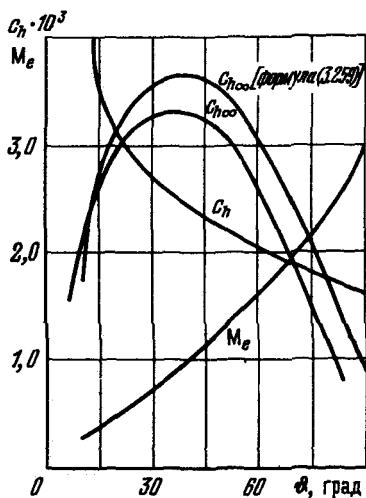


Рис. 60.

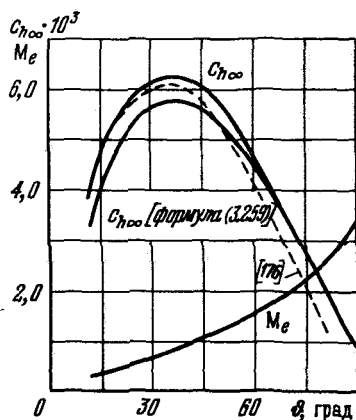


Рис. 61.

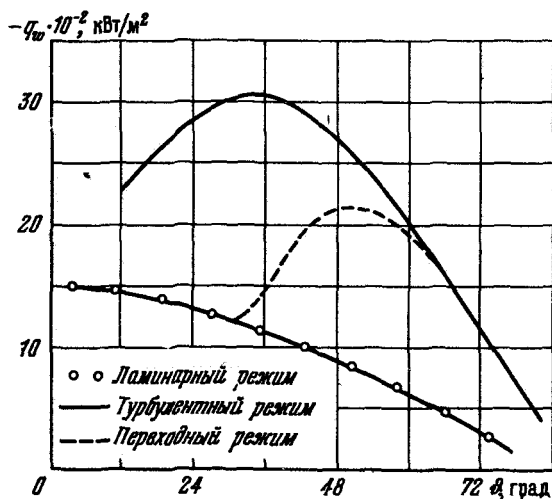


Рис. 62.

В заключение настоящего параграфа приведем формулу для расчета турбулентного теплообмена в окрестности критической точки осесимметричного тела, предложенную В.С. Авдеевским [170]

$$q_w = 3600 g c_p \rho_e \beta_s \pi \cdot 0,040 \left(\frac{\beta_s \pi^2 \rho_e}{\mu_e} \right)^{-0,2} \times \left(\frac{T_w}{T_\pi} \right)^{-0,16} Pr^{-0,6} (T_\pi - T_w) \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч}}, \quad (3.261)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Формула (3.261) получена в результате решения интегрального соотношения энергии с использованием экспериментальной связи между тепловым потоком и местными характеристиками пограничного слоя, установленной для плоской пластины. При выводе формулы (3.261) принималось, что $\rho_e(x) = \text{const}$.

На рис. 60 и 61 представлены результаты расчетов коэффициентов теплопередачи $c_{h\infty}$ и c_h на поверхности сферы для тех же условий, для которых были рассчитаны коэффициенты трения на рис. 45, 46 соответственно. Местный коэффициент теплопередачи, определенный по параметрам на внешней границе пограничного слоя (см. формулу (3.251)), вычислялся по известному коэффициенту трения (рис. 45, 46) по второй из формул (3.257). Местный коэффициент теплопередачи $c_{h\infty}$ определялся по соотношению

$$c_{h\infty} = c_h \frac{\rho_e}{\rho_\infty} \frac{U_e}{U_\infty} \quad (3.262)$$

На рис. 60 и 61 приведены также распределения местных коэффициентов теплопередачи $c_{h\infty}$, полученные по формуле Ван-Дриста (3.259). Как видно из этих рисунков, оба метода приводят к близким результатам. Максимальное значение теплопередачи имеет место вблизи звуковой линии.

На рис. 61, кроме того, представлена кривая, полученная в уже цитированной выше работе Р.А. Сафарова и Г.А. Тирского [176] путем численного интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя (см. комментарий к рис. 46). Совпадение результатов всех расчетов вплоть до угловой координаты $\theta = 60^\circ$ следует признать вполне удовлетворительным. Отметим, что все зависимости $c_h(\theta)$, $c_{h\infty}(\theta)$ получены на рис. 60, 61 в предположении о том, что турбулентный пограничный слой развивается от передней критической точки.

В реальных условиях в непосредственной окрестности критической точки всегда имеется ламинарный участок и область перехода конечной протяженности. Наличие этих участков может существенно изменить характер распределения тепловых потоков и повлиять на суммарный тепловой поток от газа к телу. О характере распределения тепловых потоков при различных режимах течения в пограничном слое на сфере можно судить по рис. 62, заимствованному из работы Р.А. Сафарова и Г.А. Тирского [176]. Расчет переходной области в [176] был проведен для тех же условий, что и на рис. 61 на основе теории турбулентных пятен Эммонса, обобщенной Ченом и Тайсоном [185] на течение вблизи затупленных тел. Из рис. 62 следует, что положение и величина максимального теплового потока, полученного с учетом переходного режима течения, могут значительно отличаться от аналогичных величин в случае полностью турбулентного режима течения.

Глава 4.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА НЕПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СПОСОБНОСТЬЮ В ПОТОКАХ ДИССОЦИИРОВАННОГО ГАЗА

§ 21. ВВЕДЕНИЕ

Проблема расчета турбулентных пограничных слоев в многокомпонентных химически реагирующих газовых смесях является весьма актуальной в связи с многочисленными задачами ракетной и космической техники, газодинамических и химических лазеров, химической технологии и т.д.

Существующие методы расчета характеристик турбулентных пограничных слоев в потоках многокомпонентных реагирующих газовых смесей базируются в основном на обобщении полуэмпирических теорий турбулентности в несжимаемой жидкости. "Дифференциальная" сущность большинства этих теорий, основывающихся на "гипотезе локальности" процессов турбулентного переноса, значительно ограничивает область их применимости. При обобщении теорий турбулентности на течения сжимаемой среды с теплообменом, химическими реакциями и тому подобными факторами к указанному "естественному" ограничению добавляются и другие. Поэтому обоснованность подобных обобщений во многих случаях еще предстоит экспериментально доказать, поскольку опытные данные для течений, осложненных отдельными или несколькими из перечисленных выше факторов, зачастую практически отсутствуют. Наименее ясным до последнего времени остается вопрос о влиянии пульсаций температуры в турбулентном движении на скорость химических реакций. Имеющиеся в литературе оценки роли этого фактора нельзя считать достаточно убедительными и надежными, поэтому разработка действенных методов учета влияния турбулентности на кинетику химических реакций является весьма актуальной задачей.

Определенные надежды на успех обобщений полуэмпирических теорий турбулентности в несжимаемой жидкости на более сложные течения вселяют результаты расчетов течений однородного по составу сжимаемого газа при сверхзвуковых скоростях и успешное сопоставление этих расчетов с опытными данными (см. § 14).

Проблема течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей в турбулентном пограничном слое весьма многопланова: в настоящей главе рассматриваются лишь течения диссоциированного газа на непроницаемой поверхности.

Научный и инженерный интерес к рассматриваемой проблеме возник главным образом в связи с необходимостью оценки теплообмена и сопротивления поверхностей тел, движущихся в атмосфере Земли и других планет с гиперзвуковыми скоростями. При таких скоростях торможение газа в ударных волнах и пограничных слоях приводит к столь значительному повышению температуры газа, что в нем начинают протекать процессы возбуждения колебательных степеней свободы молекул, диссоциации, ионизации и излучения.

Течение такого газа в зависимости от соотношения между скоростью переноса вещества и скоростями химических реакций может быть "равновесным", "неравновесным" или "замороженным". Если время протекания химических реакций много меньше характерного времени течения, то течение можно считать термохимически равновесным. При замороженном течении время протекания химических реакций много больше времени течения, в этом случае состав смеси в пограничном слое целиком определяется процессами конвективного и диффузионного переноса.

Не касаясь проблем, связанных с химическим взаимодействием пограничного слоя с поверхностью обтекаемого тела, имеющих первостепенное значение для расчета теплозащиты спускаемых аппаратов, рассмотрим лишь основные результаты исследований характеристик стационарного турбулентного пограничного слоя при гиперзвуковых скоростях на твердой непроницаемой и неразрушаемой поверхности. При этом, учитывая специфические особенности сложившихся подходов к указанной проблеме, рассмотрим последовательно итоги исследований равновесных, замороженных и неравновесных течений.

Равновесные течения диссоциированного газа. При изучении равновесных течений в пограничном слое исторически сложились два подхода. Первый из них является по существу феноменологическим. Второй, охватывающий значительно более широкий круг явлений, в том числе неравновесные (релаксационные) процессы в газах, является методом кинетической теории газов.

Феноменологическая сущность первого метода проявляется главным образом через форму используемых дифференциальных уравнений, которая в этом случае совпадает с формой уравнений для однородного по составу газа. При этом коэффициенты переноса, зависящие от молекулярных свойств газа, входят в феноменологическую теорию как известные наперед константы или функции состояния, которые не могут быть вычислены теоретически, а должны определяться из опыта или получаться путем расчета методом кинетической теории газов, что, однако, не меняет феноменологической сущности метода. Приближенность феноменологического подхода по сравнению с кинетическим особенно подчеркивается тем обстоятельством, что коэффициенты переноса (вязкость, теплопроводность), а также удельная (эффективная) теплоемкость (энтальпия) не яв-

ляются, строго говоря, функциями газовой смеси (т.е. функциями температуры и давления), но зависят также в общем случае от характера движения, поскольку в процессе движения изменяется элементный состав смеси. Феноменологический подход характерен для работ [154, 188-191].

Кинетический метод позволяет составлять макроскопические уравнения переноса и определять коэффициенты переноса (вязкость, теплопроводность, диффузия) как функции температуры, давления, состава газовой смеси, молекулярных весов компонент и некоторых иных параметров, описывающих поле межмолекулярных сил (см. гл. 1). Кинетический метод был использован в работах [113, 192-195].

Приведенная краткая характеристика двух подходов к изучению равновесных течений относится в одинаковой степени к ламинарным и турбулентным пограничным слоям в многокомпонентных химически реагирующих смесях, поскольку в пристенных турбулентных пограничных слоях всегда существует область вязкого подслоя, непосредственно прилегающая к стенке, в которой молекулярный перенос существенно превалирует над молярным (турбулентным). Существенность этого фактора становится очевидной, если учесть, что при прочих равных условиях относительная толщина вязкого подслоя имеет тенденцию к росту с увеличением числа Маха (например, при числе Маха, равном десяти, толщина вязкого подслоя может превышать 30% от толщины всего слоя; см. рис. 7).

Прежде чем переходить к оценке результатов, полученных в отдельных работах, уместно заметить, что в рассматриваемом случае, так же как это не раз имело место в теории пограничного слоя, исследования течений диссоциированного газа в ламинарных пограничных слоях в данном случае почти на десять лет опередили аналогичные исследования турбулентных пограничных слоев. Результаты, полученные для ламинарного пограничного слоя, естественно, наложили свой отпечаток на подходы к исследованию турбулентного пограничного слоя.

Вычисления равновесного состава воздуха, как это отмечалось ранее в § 12, показали, что благодаря значительному различию в энергии диссоциации кислорода и азота (5,08 эВ для O_2 и 9,76 эВ для N_2) диссоциация кислорода в основном заканчивается до начала диссоциации азота. Вследствие высокого потенциала ионизации для кислорода и азота (13,62 эВ для O и 14,55 эВ для N) диссоциация молекул азота в значительной степени заканчивается до начала ионизации атомов. Отмеченные особенности протекания химических реакций в воздухе при высоких температурах позволили приблизительно выделить области изменения температуры и давления, для каждой из которых характерна та или другая реакция (см. рис. 16). Показанное на рис. 16 разделение на области позволило существенно упростить расчет течений воздуха при высоких температурах.

Феноменологический подход с характерным для него "игнорированием" детальной картины распределения отдельных компонент смеси в пограничном слое и стремлением оставаться в рамках

достаточно апробированных методов расчета, разработанных для однородного по составу газа, позволил тем не менее достаточно удовлетворительно предсказать некоторые характерные свойства течений равновесно диссоциирующего газа.

В работе Хидальго [188], относящейся к 1958 г., на основе приближенного обобщения известного метода расчета трения на плоской пластине Ван-Дриста [22] удалось показать, что процесс равновесной диссоциации изменяет трение в турбулентном пограничном слое на сильно охлажденной поверхности не более чем на 20%.

Роуз, Пробстейн, Адамс [189] исследовали теплопередачу через интенсивно охлаждаемый частично диссоциированный турбулентный пограничный слой на телах вращения, основываясь на результатах известной работы Фейя и Ридделла [196]. В результате были получены приближенные критериальные зависимости числа Нуссельта от чисел Рейнольдса, Прандтля и Льюиса.

Обстоятельное исследование течений равновесно диссоциирующего газа на пластине, конусе и в окрестности передней критической точки сферы и цилиндра было проведено П.П. Воротниковым [154, 190, 191]. В основу исследования положен интегральный метод с использованием закона сопротивления для плоской пластины. Влияние химических реакций, протекающих в воздухе при высоких температурах, учитывалось путем использования "эффективных" коэффициентов переноса и энтальпии. Результаты систематических расчетов представлены в удобной для практического использования форме в виде графиков и интерполяционных формул.

Естественное в начале 60-х годов (в условиях дефицита ЭВМ) стремление к упрощению относительно сложной процедуры расчета характеристик турбулентного пограничного слоя в равновесно диссоциирующем газе привело к построению методов расчета, базирующихся на приближенных моделях диссоциирующего газа.

Наибольшее применение нашла модель "идеально диссоциирующего газа", предложенная в работе Лайтхилла [197]. Согласно этой модели свойства идеально диссоциирующего газа определяются заданием постоянных T_d и ρ_d (характеристические температура и плотность); газ представляет собой бинарную смесь атомов (A) и молекул (A_2), в которой протекает одна реакция вида: $A_2 = 2A$.

Константа равновесия и состав идеально диссоциирующего газа определяются равенством

$$\frac{c_A^2}{c_{A_2}} = K_c = \frac{\rho_d}{\rho} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right).$$

Здесь c — массовая концентрация, T и ρ — температура и плотность смеси соответственно. Наряду с допущением о постоянстве характеристической плотности, предполагается, что молекулы газа независимо от температуры возбуждены по колебательным степеням свободы на величину, равную половине величины "классичес-

кого" возбуждения колебаний молекул. Последнее означает, что отношение удельных теплоемкостей у идеально диссоциирующего газа до начала диссоциации оказывается равным $\gamma = c_p/c_v = 1,33$, а не 1,4, как у реальных двухатомных газов при отсутствии возбуждения колебаний (подробно модель Лайтхилла рассмотрена в § 23).

Модель идеально диссоциирующего газа впервые была использована для построения интегрального метода расчета трения на плоской пластине в работе С.И. Костерина, Ю.А. Кошмарова [192]. В качестве полуэмпирической теории турбулентности использовалась теория Прандтля, числа Прандтля и Шмидта и их турбулентные аналоги полагались равными единице; в работе не содержалось результатов расчетов.

В рамках модели идеально диссоциирующего газа на основе полуэмпирической теории Кармана был предложен метод расчета трения и теплопередачи ($Pr \neq Sc \neq 1$) на плоской пластине в работе Ю.В. Лапина [194]. Эта же задача, но с использованием формулы Прандтля рассматривалась И.П. Гинзбургом [193]. В этих работах также не содержалось результатов расчетов.

Первые оценки влияния равновесной диссоциации на трение в пограничном слое, проведенные на основе "кинетического" метода [194], были получены Ю.В. Лапиным и Г.П. Сергеевым [195] в 1964 г. Согласно этим расчетам отличие коэффициентов трения, соответствующих равновесному течению диссоциированного газа, от коэффициентов трения, рассчитанных для тех же условий, но при отсутствии диссоциации, может достигать 40%.

Практически все упомянутые выше исследования, будучи интегральными по духу, основывались на ряде упрощающих допущений. В частности, смесь, как правило, предполагалась бинарной, число рассматриваемых реакций ограничивалось одной-двумя основными реакциями. При рассмотрении равновесных течений многокомпонентной диссоциирующей смеси обычно принималось допущение о неизменности концентраций химических элементов поперек вязкого подслоя. Это допущение в совокупности с выражениями для констант равновесия независимых химических реакций позволяло решить задачу об определении состава смеси в каждой точке пограничного слоя. Подобный приближенный подход к определению равновесного состава смеси был обусловлен прежде всего трудностями, возникающими при интегрировании исходных дифференциальных уравнений переноса (диффузии) отдельных компонент, описывающих в общем случае неравновесное течение.

Применение уравнений диффузии к расчету течений, близких к равновесным, в математическом отношении означает необходимость интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром при старшей производной. Роль малого параметра при этом играет величина, обратная числу Дамкелера, представляющему отношение двух характерных времен: времени нахождения частиц в потоке (времени диффузии) и времени

протекания химической реакции. Как показывает опыт расчетов течений, близких к равновесным, получение "равновесных решений" связано с неоправданно большими затратами машинного времени и требует значительного опыта расчета таких течений. В связи с этим для расчета равновесных течений целесообразно пользоваться редуцированной формой системы исходных уравнений диффузии, предложенной применительно к ламинарным течениям О.Н. Сусловым, Г.А. Тирским, В.В. Шенниковым [198].

Подобная редуцированная форма уравнений диффузий, упрощенная допущением о локальном подобии профилей скорости и концентрации элементов, была использована Ю.В. Лапиным и Ю.С. Чумаковым [199, 200] для систематических расчетов характеристик равновесных турбулентных пограничных слоев в воздухе на плоской пластине и в окрестности звуковой линии на сфере (некоторые подробности этих исследований будут рассмотрены ниже). Расчеты с использованием уравнений диффузии элементов показали, что изменение элементного состава в вязком подслое может оказаться довольно значительным. Так, при числах Маха, близких к 10, концентрация элемента кислорода на стенке может на 50% превосходить значение этой величины во внешнем потоке. В то же время расчет интегральных характеристик (трения и тепловых потоков) с учетом и без учета диффузии элементов показал, что изменение элементного состава смеси в вязком подслое не оказывает существенного влияния на эти характеристики (различие составило около 1%). Иными словами, было показано, что при расчете интегральных характеристик в области диссоциации эффектом "разделения элементов", обусловленным различием диффузионных свойств отдельных компонент смеси, можно пренебрегать. Этот вывод является существенным, поскольку укрепляется уверенность в достоверности ранее проведенных на основе фономенологического метода, т.е. без учета эффекта разделения элементов, оценок характеристик турбулентного пограничного слоя. Систематические расчеты трения и тепловых потоков в равновесных турбулентных пограничных слоях на плоской пластине (клине) были обработаны Ю.В. Лапиным и Ю.С. Чумаковым [200] на ЭВМ и представлены в виде номограмм и простых аппроксимационных соотношений, сводящих расчет к алгебраическим вычислениям.

Численный расчет характеристик турбулентного пограничного слоя на сфере в равновесно диссоциирующем воздухе на основе уравнений пограничного слоя в частных производных с учетом эффекта диффузии элементов проведен Ю.Е. Каряжиным и Ю.В. Лапиным [113]. В этой работе подробно обсуждаются особенности постановки задачи и алгоритм расчета состава смеси.

Замороженные течения диссоциированного газа. В замороженном течении скорость химических реакций пренебрежимо мала по сравнению со скоростями диффузионного и конвективного переноса. "Исчезновение" в этом случае "источникового" члена в уравнениях переноса (диффузии) компонент делает исследование замороженных течений наиболее простым по сравнению с неравновесными и равновесными

течениями. Факторами, определяющими перенос компонент в замороженном пограничном слое, являются состав смеси на внешней границе слоя, получаемый из решения "внешней задачи", и скорость процессов каталитической рекомбинации на стенке.

Для первых исследований замороженного течения характерно произвольное задание концентраций компонент на стенке, без установления их связи со скоростями каталитических поверхностных реакций. В действительности лишь в двух крайних случаях обтекания абсолютно каталитической и абсолютно некаталитической стенок эта связь является заранее определенной; при произвольных скоростях каталитической рекомбинации значения концентраций компонент на стенке должны определяться в процессе решения задачи.

Приближенный способ расчета поверхностного трения и теплоотдачи в турбулентном пограничном слое на плоской пластине в случае замороженного течения был предложен впервые в 1961 г. в работе Дорренса [201] (см. также [28]). В основу метода была положена полуэмпирическая теория Прандтля; воздух рассматривался как бинарная смесь атомарных и молекулярных компонент; энтальпия газа как функция концентрации компонент и температуры рассчитывалась в предположении, что атомы обладают только поступательными степенями свободы, а молекулы — поступательными и вращательными, т.е. энергия, приходящаяся на колебательные степени свободы, не учитывалась. Метод был использован для систематических расчетов коэффициента трения в диапазоне чисел Маха от 0 до 4, чисел Рейнольдса — от 10^5 до 10^8 , температурного фактора (T_w/T_e) — от 0,04 до 1,0. Результаты расчетов, представленные на рис. 63 (здесь c_f — коэффициент трения при заданных условиях, c_{f0} — коэффициент трения при тех же условиях, но при отсутствии диссоциации, c — массовая концентрация атомов; индексы e и w означают параметры на внешней границе и стенке соответственно), были обработаны и представлены простым соотношением

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \left[2 \left(\frac{1+c_e}{1+c_w} \right)^{1/7} - 1 \right] \begin{matrix} + 4\% \\ - 2\% \end{matrix} \quad (4.1)$$

На рис. 63 значение абсциссы, равное единице, соответствует режиму обтекания абсолютно некаталитической стенки ($c = \text{const} = c_e$), аналогично — значению абсциссы, равному двум, соответствует обтекание абсолютно каталитической пластины ($c_w = 0$) при максимальной степени диссоциации во внешнем потоке ($c_e = 1$). Режимы течения, соответствующие изменению абсциссы от 0,5 до 1, можно рассматривать как режимы "пристеночной" диссоциации (каталитическая диссоциация). Как следует из рис. 63, каталитические процессы на стенке приводят в рассматриваемом диапазоне определяю-

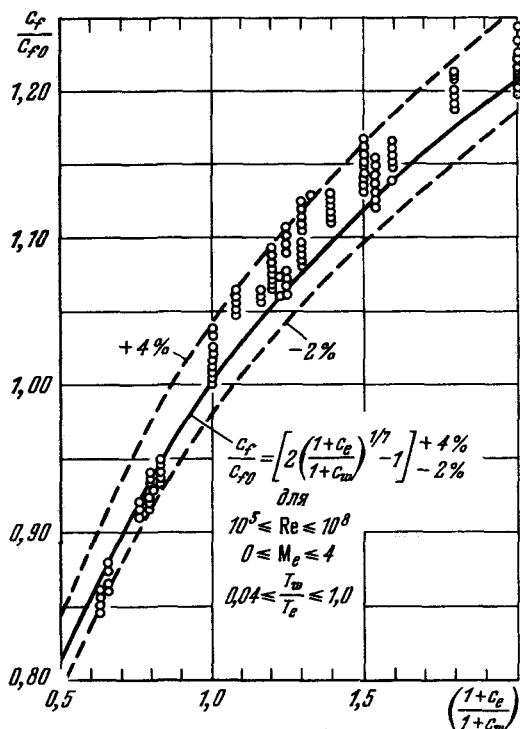


Рис. 63.

ших параметров к изменению трения в замороженном турбулентном пограничном слое не более чем на 20%.

К аналогичной оценке влияния диссоциации на трение на пластине пришли Ю.В. Лапин и Г.П. Сергеев [195], положившие в основу исследования полуэмпирическую теорию Кармана и модель идеально диссоциирующего газа. Исследование замороженного турбулентного пограничного слоя на основе предельных законов трения было проведено С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьевым [129].

Для всех перечисленных исследований характерен "параметрический" учет каталитических процессов на стенке, проявившийся в произвольном задании концентраций компонент на стенке. В работе Ю.В. Лапина [202] (см. также [35]) наличие химических процессов каталитической адсорбции учитывалось посредством граничного условия для концентрации атомов на стенке, получающегося из условия равенства диффузионного потока атомов на стенке массовой скорости каталитической рекомбинации, причем предполагалось, что каталитическая реакция идет по первому порядку. В результате было получено выражение для теплового потока на стенке при произвольной скорости каталитической рекомбинации. В предположении об отсутствии влияния каталитических свойств стенки на трение (это влияние, как видно из приведенных выше расчетов Дорренса, невелико и составляет 20%) было получено следующее выражение,

характеризующее отношение теплового потока (q_w) при произвольной скорости каталитической рекомбинации к тепловому потоку (q_w) $_{k_w \rightarrow \infty}$ на абсолютно каталитической стенке

$$\frac{q_w}{(q_w)_{k_w \rightarrow \infty}} = 1 - \frac{(Le^{2/3} - 1) Sc^{1/3} c_e D}{[h_e + \frac{1}{2} Pr^{1/3} U_e^2 + (Le^{2/3} - 1) Sc^{1/3} c_e D - h_w][1 + Sc^{2/3} A_w']} \quad (4.2)$$

Здесь Le , Sc , Pr - числа Льюиса, Шмидта и Прандтля соответственно, h - энтальпия, D - энергия диссоциации, c_e - концентрация атомов на внешней границе, $A_w = \rho_w k_w U_e / \tau_w$ - параметр каталитической рекомбинации, k_w - константа скорости рекомбинации, τ_w - напряжение трения на стенке.

Результаты расчетов по приведенной формуле для клина, обтекаемого воздухом при различных скоростях, при $T_w = 700$ К и давлении, соответствующем высоте 45 км, представлены на рис. 64. Из рис. 64 видно, что каталитическая способность стенки оказывает очень сильное влияние на величину теплового потока. Это приводит к важному выводу о том, что путем соответствующего подбора материала обшивки (текстолит, асботекстолит) спускаемого аппарата можно значительно уменьшить теплопередачу к поверхности (тот факт, что кривая, рассчитанная для скорости полета 2,5 км/с, лежит ниже кривой для 3 км/с, объясняется тем, что азот начинает диссоциировать после того, как весь кислород во внешнем потоке уже продиссоциировал).

Обстоятельные расчеты характеристик замороженных турбулентных пограничных слоев на пластине и сфере, обтекаемых сверхзвуковым потоком воздуха, при различных каталитических способностях поверхности в рамках полуэмпирического метода проведены Ю.В. Лалиным и Ю.С. Чумаковым [200]. Результаты расчетов теплового потока на пластине в широком диапазоне изменения параметров внешнего потока и на стенке были обобщены в виде соотношений и таблиц, сводящих определение теплового потока на поверхностях с различной каталитической способностью к простым алгебраическим вычислениям. Расчеты тепловых потоков на сфере показали, что в широком диапазоне изменения чисел Маха на бесконечности ($9 < M_\infty < 28$) отношение теплового потока вдоль сферы к максимальному тепловому потоку очень слабо зависит от числа M_∞ и не зависит практически от каталитических свойств стенки, рис. 65 (зависимости рис. 65 справедливы для абсолютно каталитической и некаталитической поверхностей).

Численные расчеты замороженного многокомпонентного турбулентного пограничного слоя на сфере при ее обтекании потоками диссоциированного воздуха и смеси углекислого газа и азота были проведены Р.А. Сафаровым [203], Р.А. Сафаровым и Г.А. Тирским

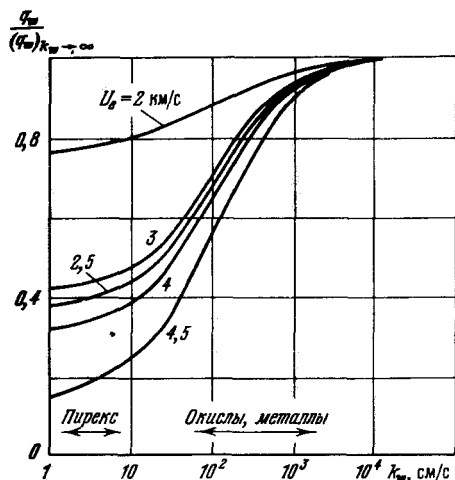


Рис. 64.

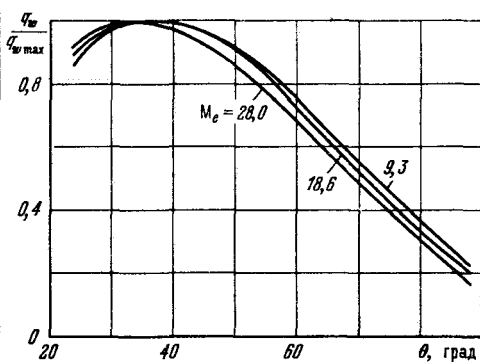


Рис. 65.

[204]. При этом использовалась трехслойная модель эффективной вязкости Меллора, а также учитывалась конечная протяженность переходной области. В результате расчетов, в частности, было установлено, что если критическое значение числа Рейнольдса, определяющее положение точки потери устойчивости ламинарного течения, достигается вблизи лобовой точки сферы, то положение и величина максимального теплового потока не зависят от того, учитывается или не учитывается область перехода.

Неравновесные течения диссоциированного газа. Расчеты характеристик турбулентного пограничного слоя при равновесном и замороженном течениях позволили произвести оценки влияния диссоциации на сопротивление и теплообмен для двух предельных случаев термохимического состояния движущейся газовой смеси. Вероятно, нельзя утверждать, что в общем случае неравновесного течения многокомпонентной газовой смеси вблизи поверхности с произвольной каталитической способностью при наличии продольного перепада давления значения коэффициентов трения и теплообмена всегда будут "промежуточными" между замороженными и равновесными их значениями, поскольку рассматриваемые процессы относятся к "сильно нелинейным". Последнее обстоятельство в сочетании с трудностями, обусловленными сложностью структуры турбулентных пограничных слоев при сверхзвуковых скоростях, привело к тому, что до настоящего времени проблема неравновесных течений в турбулентных пограничных слоях остается практически мало исследованной.

Первое исследование теплоотдачи от неравновесного турбулентного пограничного слоя к каталитической поверхности было выполнено в 1965 г. Кульгейном [205]; при этом неравновесный характер диссоциации учитывался только в вязком подслое, в турбу-

лентном же ядре течение предполагалось замороженным. С помощью ЭВМ были проведены численные расчеты теплоотдачи для различных условий течения во внешнем потоке и на стенке.

Ю.В. Лапиным [206] был предложен интегральный метод расчета трения в турбулентном пограничном слое на плоской пластине с произвольной каталитической способностью. В основу исследования была положена двухслойная прандтлевская схема турбулентного слоя, числа Прандтля и Шмидта, а также их турбулентные аналоги принимались равными единице. В качестве модели диссоциирующего газа использовалась модель идеально диссоциирующего газа, обобщенная на неравновесные течения в работе Фримена [207]. Обобщение этого метода на случай, когда числа Прандтля и Шмидта постоянны по сечению ламинарного подслоя и равны их значениям на стенке, было дано в [35].

Ю.Н. Койчев и Ю.С. Чумаков [208] в рамках того же метода исследовали влияние процессов переноса в вязком подслое на трение и теплообмен на плоской пластине, отказавшись от условия постоянства числа Прандтля и эффективного числа Шмидта поперек вязкого подслоя. Проведенные авторами расчеты течения трехкомпонентной смеси, состоящей из атомов кислорода и молекул кислорода и азота (диссоциирует только кислород), показали, что допущение о постоянстве чисел Прандтля и Шмидта вполне обоснованно (число Прандтля практически постоянно, а число Шмидта меняется не более чем на 5%).

Весьма обстоятельно свойства неравновесных течений в турбулентном пограничном слое были исследованы Ю.В. Лапиным и Ю.С. Чумаковым [199, 200]. В этих работах метод Ю.В. Лапина [206] был обобщен и применен к течению реального газа (воздуха) на плоской пластине и в окрестности звуковой линии на сфере (подробно некоторые из этих результатов будут рассмотрены в следующих параграфах).

Из приведенного обзора следует, что до настоящего времени исследованы главным образом течения диссоциированного газа на пластине (клине) и на сфере. Практически все более или менее существенные результаты в исследовании диссоциированных турбулентных пограничных слоев получены с помощью интегральных методов расчета с использованием хотя и достаточных для рассмотренных классов тел (пластина, клин, сфера), но "старых" (типа прандтлевской двухслойной) схем турбулентного пограничного слоя.

Исследования течений при сильных продольных перепадах давления отсутствуют; чрезвычайно мал опыт численного интегрирования дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя в диссоциированных смесях с использованием более современных полумпирических теорий турбулентности. Все эти и многие другие проблемы ждут своего решения.

§ 22. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО КИНЕТИКЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

В настоящем параграфе будут приведены некоторые необходимые для дальнейшего сведения по формальной кинетике гомогенных (объемных) химических реакций и, в частности, сведения по кинетике реакций диссоциации основных компонентов воздуха (кислорода и азота), а также по кинетике гетерогенных (поверхностных) химических реакций.

22.1. Некоторые определения. Процессы химического взаимодействия между частицами газовой смеси являются следствием столкновений реагирующих частиц. В зависимости от того, в каких системах протекают реакции, они могут быть двух типов: гомогенными и гетерогенными.

Гомогенными называются реакции, протекающие в однородной среде (например, в смеси реагирующих газов или в растворе). Обычно под гомогенными реакциями подразумевают реакции, протекающие в конечных объемах газов, растворов и т.д. При этом, если участвующие в реакции газы содержатся в сосуде, то скорость гомогенной реакции не зависит от размеров поверхности сосуда. В качестве примера гомогенной реакции можно указать на реакцию диссоциации молекул кислорода и азота при высоких температурах.

Гетерогенными называются реакции, протекающие в неоднородной среде, на поверхности соприкосновения взаимодействующих веществ, находящихся в разных фазах, например твердой и газообразной (реакция рекомбинации атомов на каталитической стенке), жидкой и газообразной (реакция выгорания углерода на поверхности пленки расплава некоторых материалов, применяемых при теплозащите космических аппаратов) и т.д. К гетерогенным обычно относят также реакции, протекающие в узких (по сравнению с объемом, занимаемым газами) зонах, образующихся при соприкосновении заранее перемешанных реагирующих газов. В предельном случае, когда скорость химической реакции бесконечно велика по сравнению со скоростью диффузии (скоростью подвода и отвода реагентов и продуктов реакции), такую зону можно рассматривать как поверхность (фронт реакции). В качестве примера такой реакции можно указать на реакцию окисления (горения) газообразного углерода при обтекании углеродистой стенки потоком воздуха, нагретого до высокой температуры. В этом случае образующийся в результате сублимации твердого углерода газообразный углерод диффундирует от поверхности стенки к внешней границе пограничного слоя навстречу кислороду, диффундирующему в противоположном направлении. Если температура в пограничном слое достаточно высока, то скорость реакции окисления (горения) углерода будет очень большой, а зона реакции (фронт горения) будет настолько тонкой по сравнению с толщиной пограничного слоя, что практически можно считать такую реакцию гетерогенной.

Реакция называется эндотермической, если она идет с поглощением тепла (например, реакция диссоциации молекул кислорода)

и экзотермической, если она идет с выделением тепла (например, реакция рекомбинации атомов кислорода).

22.2. Закон действующих масс. Каждая химическая реакция протекает по закону постоянных кратных отношений и в общем виде может быть описана следующим стехиометрическим уравнением:

$$\sum_{k=1}^N \nu'_k A'_k \xrightleftharpoons[k'']{k'} \sum_{k=1}^N \nu''_k A''_k, \quad (4.3)$$

где ν'_k и ν''_k — стехиометрические коэффициенты соответственно для реагентов (штрих) и продуктов реакции (два штриха); A_k — химические символы реагирующих веществ; N — общее число химических компонент; k' и k'' — константы скоростей соответственно прямой и обратной реакций, являющиеся функцией температуры.

Основным соотношением, описывающим скорость химической реакции (скорость образования или исчезновения i -й компоненты), является соотношение, даваемое законом действующих масс. В соответствии с законом действующих масс скорость образования химического вещества пропорциональна произведению концентраций реагирующих компонент, причем каждая концентрация входит в произведение в степени, равной соответствующему стехиометрическому коэффициенту. В соответствии с этим законом для написанного выше уравнения химической реакции (4.3) скорость протекания реакции слева направо может быть представлена выражением

$$\left(\frac{d[n_i]}{dt} \right) = k'(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu'_k}, \quad (4.4)$$

а скорость протекания реакции справа налево выражается равенством

$$\left(\frac{d[n_i]}{dt} \right)'' = k''(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu''_k}. \quad (4.5)$$

Здесь через $[n_i]$ обозначено число молей i -й компоненты в единице объема. Производная $d[n_i]/dt$ выражает скорость изменения числа молей i -й компоненты в единице объема вследствие протекания химической реакции. Отметим, что уравнения (4.4) и (4.5) написаны в расчете на 1 моль.

Если реакция такова, что реагенты присутствуют слева и справа в уравнении реакции, то выражения для скоростей реакции следует записать в виде

$$\left(\frac{d[n_i]}{dt} \right)' = (\nu''_i - \nu'_i) k'(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu'_k}, \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{d[n_i]}{dt} \right)'' = (\nu''_i - \nu'_i) k''(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu''_k}. \quad (4.7)$$

Эти уравнения записаны в расчете на $(\nu''_i - \nu'_i)$ молей.

Общая скорость образования i -й компоненты будет равна разности скоростей прямой и обратной реакций

$$\frac{d[n_i]}{dt} = (\nu_i'' - \nu_i') k'(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'} - (\nu_i'' - \nu_i') k''(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k''}. \quad (4.8)$$

При химическом равновесии не происходит изменения в составе смеси, т.е. скорости прямой и обратной реакций равны ($d[n_i]/dt = 0$), следовательно в этом случае

$$\frac{k'(T)}{k''(T)} = \frac{N}{\prod_{k=1}^N [n_k^{(e)}]^{\nu_k'' - \nu_k'}} \equiv K_n(T), \quad (4.9)$$

где $K_n(T)$ — константа равновесия, а индексом (e) обозначено равновесное значение $[n_k]$.

Уравнение (4.9) является наиболее общим уравнением для определения состава продуктов реакции при химическом равновесии. Это уравнение связывает отношение кинетических параметров k' и k'' с константой равновесия $K_n(T)$, которая может быть точно вычислена с помощью термодинамических и квантовомеханических методов.

Уравнение (4.8) при использовании соотношения (4.9) может быть записано также в виде

$$\frac{d[n_i]}{dt} = (\nu_i'' - \nu_i') k'(T) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'} \left[1 - \frac{1}{K_n(T)} \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'' - \nu_k'} \right]. \quad (4.10)$$

Если в системе протекает несколько реакций одновременно, то для расчета суммарной скорости образования i -й компоненты можно воспользоваться принципом независимости отдельных реакций. Согласно этому принципу, если в системе протекает несколько реакций, то каждая из них протекает независимо от другой и каждая подчиняется закону действующих масс. Полная скорость образования i -й компоненты равняется сумме скоростей образования той же компоненты в каждой из реакций

$$\begin{aligned} \frac{d[n_i]}{dt} &= \sum_{s=1}^a \left(\frac{d[n_i]}{dt} \right)_s = \sum_{s=1}^a (\nu_{is}'' - \nu_{is}') k'_s \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_{ks}'} \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{K_{ns}} \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_{ks}'' - \nu_{ks}'} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где a — число независимых реакций, s — номер реакции.

Для идеального газа, состояние которого описывается уравнением Клапейрона, имеем

$$[n_i] = p_i / (RT). \quad (4.12)$$

Здесь p_i - парциальное давление i -й компоненты, R - универсальная газовая постоянная (если $[n_i]$ измерять в моль/см³, а давление в атм, то газовая постоянная $R = 82,05 \text{ см}^3 \cdot \text{атм} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$).

В равновесном состоянии

$$[n_i^{(e)}] = p_i^{(e)} / (RT). \quad (4.13)$$

В химической кинетике наряду с константой равновесия K_n , выраженной через число молей (равенство (4.9)), часто пользуются константой равновесия K_p , выраженной через парциальные давления

$$K_p = \prod_{k=1}^N (p_k^{(e)})^{\nu_k'' - \nu_k'}. \quad (4.14)$$

Нетрудно видеть, имея в виду зависимость (4.13), что константы равновесия K_n и K_p связаны соотношением

$$K_n = K_p (RT)^{-\Delta \nu}, \quad \Delta \nu = \sum_{k=1}^N (\nu_k'' - \nu_k'). \quad (4.15)$$

Отношение числа молей i -й компоненты в единице объема (или парциального давления i -й компоненты) к полному числу молей в единице объема (к полному давлению смеси) называется мольной концентрацией i -й компоненты

$$x_i = \frac{[n_i]}{[n]} = \frac{p_i}{p}. \quad (4.16)$$

Здесь $[n] = \sum_{i=1}^N [n_i]$ - полное число молей в единице объема, а p - давление смеси газов.

Выражение для константы равновесия через равновесные мольные концентрации имеет вид

$$K_x = \prod_{k=1}^N (x_k^{(e)})^{\nu_k'' - \nu_k'}. \quad (4.17)$$

Аналогично можно ввести константу равновесия, выраженную через равновесные массовые концентрации,

$$K_c = \prod_{k=1}^N (c_k^{(e)})^{\nu_k'' - \nu_k'}. \quad (4.18)$$

Здесь

$$c_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad \rho_k = \frac{p_k}{RT} M_k = [n_k] M_k. \quad (4.19)$$

Используя приведенные соотношения, нетрудно показать, что между константами равновесия имеет место следующая связь:

$$\frac{k'}{k''} = K_n = K_p (RT)^{-\Delta \nu} = K_x \left(\frac{p^{(e)}}{RT} \right)^{\Delta \nu} = K_c (p^{(e)})^{\Delta \nu} \left[\prod_{k=1}^N M_k^{\nu_k'' - \nu_k'} \right]^{-1}. \quad (4.20)$$

Как видно из равенств (4.17) и (4.18), константы равновесия K_x и K_c всегда являются безразмерными параметрами. Что касается K_n и K_p (равенства (4.9) и (4.14)), то эти константы равновесия являются безразмерными лишь при условии, что $\Delta \nu = 0$.

Для того чтобы в выражении для скорости химической реакции (4.10) можно было использовать любую из приведенных выше констант равновесия, полезно заметить, что комплекс

$$\frac{k''}{k'} \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'' - \nu_k'}$$

всегда остается безразмерным.

Вводя по аналогии с константами равновесия величины

$$K_n^* = \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'' - \nu_k'}, \quad K_p^* = \prod_{k=1}^N (p_k)^{\nu_k'' - \nu_k'},$$

$$K_x^* = \prod_{k=1}^N (x_k)^{\nu_k'' - \nu_k'}, \quad K_c^* = \prod_{k=1}^N (c_k)^{\nu_k'' - \nu_k'},$$

будем иметь

$$\frac{k''}{k'} \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'' - \nu_k'} = \frac{K_n^*}{K_n} = \frac{K_p^*}{K_p} = \frac{K_x^*}{K_x} = \frac{K_c^*}{K_c} \left(\frac{p}{p^{(e)}} \right)^{\Delta \nu} = \frac{K_\alpha^*}{K_\alpha} \quad (4.21)$$

$$(\alpha = n, p, x).$$

Имея в виду равенства (4.21), получим следующие эквивалентные выражения для скорости химической реакции:

$$\begin{aligned} \frac{d[n_i]}{dt} &= (\nu_i'' - \nu_i') k' \left(1 - \frac{K_\alpha^*}{K_\alpha} \right) \prod_{k=1}^N [n_k]^{\nu_k'} = \\ &= (\nu_i'' - \nu_i') k' (RT)^{-\sigma} \left(1 - \frac{K_\alpha^*}{K_\alpha} \right) \prod_{k=1}^N (p_k)^{\nu_k'} = \\ &= (\nu_i'' - \nu_i') k' [n]^\sigma \left(1 - \frac{K_\alpha^*}{K_\alpha} \right) \prod_{k=1}^N (x_k)^{\nu_k'} = \\ &= (\nu_i'' - \nu_i') k' p^\sigma \left(1 - \frac{K_\alpha^*}{K_\alpha} \right) \prod_{k=1}^N (c_k / M_k)^{\nu_k'}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^N \nu_k'. \end{aligned} \quad (4.22)$$

22.3. Константы равновесия. Статистическая термодинамика [210, 211] приводит к следующему выражению для константы равновесия:

$$\ln K_p = -\frac{\Delta E_0}{RT} + \sum_{k=1}^N \nu_k'' \ln Q_p(A_k'') - \sum_{k=1}^N \nu_k' \ln Q_p(A_k'), \quad (4.23)$$

где

$$\Delta E_0 \equiv \sum_{k=1}^N \nu_k'' E_0(A_k'') - \sum_{k=1}^N \nu_k' E_0(A_k') \quad (4.24)$$

есть разность между энергией продуктов реакции и энергий реагирующих веществ в точке с нулевой температурой, причем реагирующие вещества и продукты реакции рассматриваются в состоянии с единичной концентрацией при нормальном давлении; Q_p — сумма состояний для газа с единичным давлением; E_0 — энергия газа при нулевой абсолютной температуре.

Сумма состояний для газа с единичным давлением связана с основной в статистической термодинамике величиной — общей суммой состояний Q — равенством

$$Q_p = pQ. \quad (4.25)$$

Сумма состояний Q выражается следующим образом:

$$Q = \sum_i g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}, \quad (4.26)$$

где ε_i — энергия частицы в i -м состоянии, g_i — статистический вес или степень вырождения уровней энергии, т.е. число состояний частицы с близкими к ε_i уравнениями энергии.

В соответствии с современными представлениями энергия молекул газа складывается из энергии поступательного движения ε_t , вращательного движения ε_r , внутримолекулярных колебаний, т.е. колебаний атомов и групп атомов в молекуле ε_v , энергии электронного возбуждения ε_e и энергии ядерного возбуждения. При рассматриваемых в газовой динамике температурах энергией ядерного возбуждения можно пренебречь. Если принять допущение об отсутствии связи между различными формами энергии, то сумма состояний выразится произведением

$$Q = Q^t Q^r Q^v Q^e. \quad (4.27)$$

Множители в правой части выражения (4.27) являются соответственно суммами состояний, связанными с поступательными, вращательными, колебательными и электронными уровнями энергии. Методами статистической механики установлено, что для двухатомных молекул

эти множители равны

$$Q_{A_2}^t = \left(\frac{2\pi m_{A_2} kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{RT}{p}, \quad (4.28a)$$

$$Q_{A_2}^r = \frac{1}{2} \frac{8\pi I kT}{h^2} = \frac{1}{2} \frac{T}{T_r}, \quad (4.28б)$$

$$Q_{A_2}^v = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^{-1} = \left(1 - e^{-T_v/T} \right)^{-1}, \quad (4.28в)$$

$$Q_{A_2}^e = \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}. \quad (4.28г)$$

Здесь m_{A_2} — масса молекулы, I — момент инерции молекулы, h — постоянная Планка, ν — частота колебаний, T_r — характеристическая температура вращения, T_v — колебательная характеристическая температура.

Выражение для $Q_{A_2}^r$ записано для двухатомной молекулы, состоящей из одинаковых атомов. Для одноатомных частиц, не имеющих вращательных и колебательных степеней свободы, соответствующие суммы состояний принимают значения, равные единице. Суммы состояний для поступательных и электронных степеней свободы одноатомных частиц имеют тот же вид, что и выражения (4.28a) и (4.28г), необходимо только в (4.28a) заменить m_{A_2} на m_A .

22.4. Константы скоростей гомогенных реакций. Выражения для констант скоростей химических реакций могут быть получены либо по теории столкновений (теории Аррениуса) [212, 213], либо по теории абсолютных скоростей реакций [214] (иногда теорию абсолютных скоростей реакций называют методом активированного комплекса).

Теория столкновений, являющаяся составной частью формальной кинетики, не рассматривает механизм столкновений, а дает лишь количественное описание результата взаимодействия частиц. Основателем теории столкновений является Аррениус. Согласно Аррениусу, всякая реакция протекает через промежуточную стадию, связанную с образованием активных молекул, т.е. молекул, обладающих запасом энергии, достаточным для преодоления энергетического барьера. Для того чтобы произошел элементарный акт химического взаимодействия, необходимо, чтобы произошло сближение молекул реагирующих веществ. При этом независимо от того, идет ли процесс с выделением или поглощением энергии, как правило, при сближении молекул возникают силы отталкивания, для преодоления которых требуется определенная энергия. Для иллюстрации сказанного на рис. 66 представлена схема изменения энергии реагирующей системы. По оси ординат отложена потенциальная энергия системы,

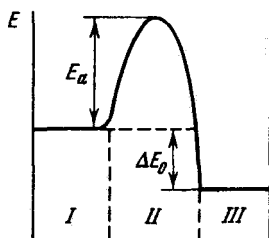


Рис. 66

а по оси абсцисс — координата, характеризующая взаимное пространственное расположение атомов. Область *I* — исходные частицы, *II* — активные частицы, *III* — продукты реакции. Разность энергий между начальным и конечным состояниями системы равна энергетическому эффекту реакции (ΔE_0). E_a — энергия активации, т.е. минимальное значение суммарной энергии сталкивающихся молекул, которая необходима для вступления их в реакцию.

Константа скорости реакции непосредственно связана с числом столкновений активных молекул, поэтому величина этой константы оказывается пропорциональной бoльцмановскому фактору $\exp(-E_a/(RT))$. Вопрос о том, какие столкновения следует считать активными, должен был решить опыт. Сравнение расчетов, основывающихся на различных гипотезах, с опытными данными показало, что для простых молекул активными столкновениями следует считать лишь такие столкновения, при которых составляющая кинетической энергии относительного движения вдоль линии центров превышает энергию активации. В этом случае для константы скорости реакции получается следующее выражение [213]:

$$k^* = 2 \tau_{12}^2 \left(\frac{2 \pi k T}{\bar{m}} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{E_a}{RT} \right) = \bar{k}(T) \exp \left(- \frac{E_a}{RT} \right),$$

($k^* = k'$ или k'').

Здесь $\bar{m} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса частиц, τ_{12} — сумма радиусов сталкивающихся частиц, k — постоянная Больцмана.

Приведенное выражение для константы скорости реакции не всегда приводит к результатам, хорошо согласующимся с опытом, особенно если в реакции участвуют сложные молекулы. Объясняется это тем, что не все активные столкновения приводят к химическому превращению. Чтобы учесть это обстоятельство, в выражение для константы скорости реакций вводится дополнительный множитель P , выражающий вероятность того, что активное столкновение завершилось химическим превращением (иногда P называют стерическим фактором). В этом случае выражение для k^* принимает вид

$$k^* = P \bar{k}(T) \exp(-E_a/(RT)). \quad (4.29)$$

Если все активные столкновения приводят к реакции, то $P = 1$. В реакциях с участием сложных молекул величина P может оказаться очень малой (порядка 10^{-8}).

Вместо выражения (4.29) большей частью используют выражение

$$k^* = z(T) \exp(-E_a/(RT)), \quad (4.30)$$

введенное в практику Аррениусом. Величина предэкспоненциального

множителя $z(T)$ обычно определяется опытным путем, а для некоторых не слишком сложных реакций может быть вычислена на основе теории абсолютных скоростей реакций [214].

22.5. Гетерогенные химические реакции. В химической кинетике термин "гетерогенные" относится к реакциям, происходящим на поверхностях раздела, т.е. на границе фаз. В зависимости от характера участия поверхности в реакции, гетерогенные реакции, представляющие наибольший интерес, могут быть двух типов.

В одном случае поверхность играет роль катализатора для реагентов, находящихся в газовой фазе. При этом продукты гетерогенной каталитической реакции не содержат элементов, входящих в состав поверхности. В процессе такой реакции ни свойства катализатора, ни форма каталитической поверхности не изменяются. В качестве примера такой реакции можно указать на реакцию каталитической рекомбинации атомов.

Во втором случае поверхность принимает непосредственное участие в реакции. В качестве примера можно указать на горение углеродистой поверхности, обтекаемой потоком высокотемпературного воздуха. В процессе такой реакции за счет уноса продуктов горения воздушным потоком может изменяться форма поверхности.

Химический процесс гетерогенных реакций локализуется в тонком (мономолекулярном) слое у поверхности. Объем этого слоя определяется величиной поверхности и размерами реагирующей молекулы. Этот мономолекулярный слой удерживается на поверхности силами химической адсорбции, по своей природе подобными силам валентной связи (физическая, или вандерваальсовская, адсорбция редко приводит к гетерогенным реакциям).

Процесс реакций, протекающий на твердой стенке, можно разделить на следующие стадии: 1) перенос реагирующих веществ к поверхности, 2) химическую адсорбцию реагирующих веществ поверхностью, 3) химическую реакцию между реагентами, адсорбированными на поверхности, или между адсорбированными компонентами и компонентами в газовой фазе, 4) десорбцию продуктов реакции с поверхности, 5) отвод продуктов реакции от поверхности.

Рассмотрим в качестве примера поверхностную реакцию рекомбинации и диссоциации кислорода. Один из возможных механизмов этой реакции, носящей имена Лэнгмюра - Хиншельвуда [215], может быть описан следующей системой уравнений:



Уравнение (4.31) описывает адсорбцию (прямая реакция) и десорбцию (обратная реакция) атома кислорода. W означает так называемый активный участок поверхности, а OW - адсорбированный атом кислорода, т.е. атом, химически связанный с поверхностью. Уравнение (4.32) описывает реакцию между соседними адсорбированными атомами, в результате которой образуется и выделяется (десорбируется) молекула кислорода, а активные участки (W) становятся свободными.

Другим возможным механизмом реакции, иногда называемым механизмом Ридила - Эли [215], является механизм, описываемый соотношениями



Уравнение (4.33) описывает реакцию между адсорбированным атомом кислорода и атомом кислорода из газовой фазы.

Как в первом, так и во втором случае скорости протекания реакций зависят от типа поверхности и условий на ней.

В газодинамических приложениях для упрощения расчетов обычно предполагается, что реакция адсорбции (4.31) протекает очень быстро и, таким образом, не определяет скорости всего процесса в целом. В этом случае определяющими будут реакции типа (4.32) и (4.33). Схематически обе эти реакции, можно записать в виде



где k_{wi} и k_{wf} - константы скоростей прямой и обратной поверхностных каталитических реакций. Выражение для скорости образования компоненты A_i , даваемое формальной кинетикой, можно представить в форме

$$j_{A_i, w} = \frac{d[A_i]_w}{dt} = k_{wi}[A_i]_w^{n_i} - k_{wf}[A_f]_w^{n_f}, \quad (4.35)$$

где n_i и n_f - порядок прямой и обратной реакций соответственно, $[A_i]_w$ и $[A_f]_w$ - концентрации реагента и продукта реакции на стенке. Размерность констант скоростей k_{wi} (или k_{wf}) зависит от размерности концентраций реагента и продукта реакции.

Вводя в рассмотрение константу равновесия

$$K_w = \frac{k_{wf}}{k_{wi}} = \frac{\{[A_i]_w^{n_i}\}^{(e)}}{\{[A_f]_w^{n_f}\}^{(e)}} \quad (4.36)$$

(здесь индексом (e) отмечены параметры в состоянии термодинамического равновесия), преобразуем равенство (4.35) к виду

$$j_{A_i, w} = \frac{d[A_i]_w}{dt} = k_{wi} \{ [A_i]_w^{n_i} - K_w [A_f]_w^{n_f} \}. \quad (4.38)$$

В стационарных условиях скорость образования каждой компоненты равна диффузионному потоку этой компоненты к поверхности

$$j_{A_i, w} = -k_{wi} \{ [A_i]_w^{n_i} - K_w [A_f]_w^{n_f} \}. \quad (4.39)$$

Соотношение (4.39) может быть использовано как граничное условие в решении задач пограничного слоя при наличии поверхностных каталитических реакций.

Зависимость константы k_{w_i} от температуры во многих случаях хорошо описывается законом Аррениуса

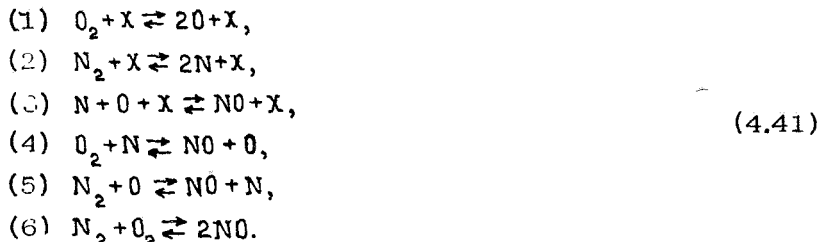
$$k_{w_i} = k_{0_i} \exp(-E_{aw}/(RT_w)). \quad (4.40)$$

Здесь k_{0_i} — константа исследуемой системы реагент — катализатор; E_{aw} — энергия активации. Отношение E_{aw} к универсальной газовой постоянной R можно рассматривать как "характеристическую" температуру T_{aw} системы реагент — катализатор.

22.6. Кинетика реакций диссоциации и рекомбинации в воздухе.

Воздух при нормальных условиях представляет собой смесь главным образом двухатомных молекул азота и кислорода. Содержание углекислого газа, паров воды, аргона и других примесей настолько мало, что их присутствием в воздухе в большинстве практически важных случаях можно пренебречь.

В диапазоне температур от 2000 до 8000 К трехатомные компоненты такие, как O_3 , NO_2 и некоторые другие многоатомные окислы азота, а также процесс ионизации не играют существенной роли. Основными в указанном диапазоне температур являются следующие реакции [216]:



Здесь X означает каталитическую частицу.

Из приведенных шести реакций последние четыре реакции с участием окиси азота NO играют второстепенную по сравнению с первыми двумя реакциями роль, так как равновесное содержание окиси азота обычно невелико (не более 1%). Поэтому при проведении приближенных расчетов, когда основной целью является получение интегральных характеристик (трение, тепловой поток), можно во многих случаях ограничиться учетом первых двух реакций (более подробный анализ системы (4.41) будет дан в § 26).

Выше уже отмечалось, что молекулярный кислород почти полностью диссоциирует (имеется в виду равновесная диссоциация) до начала диссоциации азота. Это обстоятельство позволяет рассматривать воздух как бинарную смесь атомов и молекул. Необходимо лишь в этом случае учесть разницу в энергиях диссоциации кислорода и азота.

Таблица 6

Реакция	D (эВ)	X	$2 k_{\text{ч}} (\text{см}^2 / \text{моль}^2 \cdot \text{с})$
$\text{O}_2 + \text{X} \xrightleftharpoons[k_{\text{ч}}]{} 2\text{O} + \text{X}$	5,1	O	$0,25 \cdot 10^{20} \cdot T^{-3/2}$
		O_2	$0,8 \cdot 10^{20} \cdot T^{-3/2}$
		N_2	$6,19 \cdot 10^{15} \cdot T^{-1/2}$
		N, NO	$3,02 \cdot 10^{15} \cdot T^{-1/2}$
$\text{N}_2 + \text{X} \xrightleftharpoons[k_{\text{ч}}]{} 2\text{N} + \text{X}$	9,8	N	$2,36 \cdot 10^{21} \cdot T^{-3/2}$
		N_2	$2,76 \cdot 10^{16} \cdot T^{-1/2}$
		$\text{O}_2, \text{O}, \text{NO}$	$1,09 \cdot 10^{16} \cdot T^{-1/2}$
$\text{NO} + \text{X} \xrightleftharpoons[k_{\text{ч}}]{} \text{N} + \text{O} + \text{X}$	6,5	NO	$2 \cdot 10^{21} \cdot T^{-3/2}$
		$\text{O}, \text{N}, \text{O}_2, \text{N}_2$	$1,02 \cdot 10^{20} \cdot T^{-3/2}$
$\text{O} + \text{N}_2 \xrightleftharpoons[k_{\text{ч}}]{} \text{NO} + \text{N}$	3,3		$1,62 \cdot 10^{13} \frac{\text{см}^3}{\text{моль} \cdot \text{с}}$

При неравновесной диссоциации бинарная модель воздуха может в некоторых случаях оказаться недостаточной вследствие разницы в константах скоростей рекомбинации $k_{\text{ч}}$ для реакций с участием различных каталитических частиц (X). Значение констант $k_{\text{ч}}$ для различных реакций и различных каталитических частиц приведены в табл. 6, заимствованной из работы Чанга [217].

Как видно из табл. 6, основная схема, по которой протекают реакции диссоциации, может быть записана в виде



Здесь A_2 обозначает двухатомную молекулу, A — атом, X — каталитическую частицу (атом или молекулу).

Процесс диссоциации и рекомбинации, происходящий по схеме $\text{A}_2 \rightleftharpoons 2\text{A}$, т.е. без участия частицы X, не играет существенной

роли. Скорость прямой реакции оказывается малой, так как непосредственный распад сильно возбужденной молекулы мало вероятен. Скорость обратной реакции также невелика, так как образующиеся в результате соединения двух атомов молекулы обладают очень большой энергией. Вследствие этого большинство таких молекул диссоциирует при первых же столкновениях с другими частицами.

Из приведенной выше табл. 6 видно, что константы скорости рекомбинации кислорода и азота могут существенно отличаться друг от друга в зависимости от типа каталитической частицы (X), участвующей в реакции. Константы скоростей реакций, отличающихся лишь типом каталитических частиц, зависят только от температуры и связаны между собой соотношением, вытекающим из принципа детального равновесия

$$\frac{k_d(T, X)}{k_n(T, X)} = K_n(T), \quad (4.43)$$

где K_n — константа равновесия, выражающаяся равенством (4.9).

Используя ранее полученные в этом параграфе соотношения, нетрудно написать выражение для массовой скорости образования атомарной компоненты w_A при протекании реакции, описываемой стехиометрическим уравнением (4.42). Причем, если смесь состоит из N компонент, то в общем случае массовая скорость образования w_A может быть получена, в соответствии с принципом независимости реакций (4.11), путем суммирования скоростей образования в каждой из реакций (в данном случае число реакций S равно числу компонент N). Для дальнейшего удобно получить выражение для w_A через массовые концентрации компонент. Поэтому для скорости образования $d[n_A]/dt$ воспользуемся последним из равенств (4.22), а для константы равновесия и комплекса K_c^* — равенством (4.18) и последним из равенств (4.21). Принимая во внимание, что для всех N реакций типа (4.42), отличающихся лишь каталитическими частицами X , стехиометрические коэффициенты одинаковы и равны:

$$\gamma'_{A_2} = 1, \quad \gamma'_X = 1, \quad \gamma'_A = 0, \quad \gamma''_{A_2} = 0, \quad \gamma''_X = 1, \quad \gamma''_A = 2, \text{ а также то,}$$

$$\text{что } G = \sum_{k=1}^N \gamma'_k = 2, \quad \Delta\gamma = \sum_{k=1}^N (\gamma''_k - \gamma'_k) = 1, \text{ получим}$$

$$w_A = \sum_{s=1}^N w_{As} = M_A \sum_{s=1}^N \left(\frac{d[n_A]}{dt} \right)_s = \rho^2 c_{A_2} \left(1 - \frac{1}{K_c} \frac{c_A^2}{c_{A_2}} \frac{\rho}{\rho(e)} \right) \times \\ \times \sum_{s=1}^N k_{ds} (c_{Xs} / M_{Xs}). \quad (4.44)$$

Здесь и далее индексом (e) обозначены равновесные параметры, c_{Xs} — массовая концентрация каталитической компоненты (X) в s -й реакции, N — число компонент (реакций).

Иногда массовую скорость образования атомарной компоненты w_A удобнее выражать не через константы скоростей диссоциации k_{ds} , как в выражении (4.44), а через константы скоростей рекомбинации k_r . В этом случае, имея в виду соотношение (4.43), а также используя связь констант K_n и K_c , выражаемую равенством (4.20), нетрудно получить

$$w_A = 2M_A^{-1} \rho^3 c_{A_2} \left(K_c \frac{\rho^{(e)}}{\rho} - \frac{c_A^2}{c_{A_2}} \right) \sum_{s=1}^N k_{rs} (c_{Xs} / M_{Xs}). \quad (4.45)$$

Константа равновесия K_c , определяемая в общем случае равенством (4.18), для реакции (4.42) принимает вид

$$K_c = (c_A^2)^{(e)} / c_{A_2}^{(e)}. \quad (4.46)$$

Для определения константы равновесия обратимся к равенству (4.23). Для реакции (4.42) это равенство приводится к виду

$$\ln K_p = - \frac{\Delta E_0}{RT} + 2 \ln Q_p(A) - \ln Q_p(A_2). \quad (4.47)$$

Подставим теперь выражения для сумм состояний молекул [(4.28)] и атомов в предыдущее равенство (сумма состояний, связанных с поступательным уровнем энергий для атомов Q_A^t выражается так же, как и $Q_{A_2}^t$, с тем отличием, что m_{A_2} надо заменить на m_A). После подстановки и перехода от K_p к K_c по формуле (4.20) получим

$$K_c = \frac{1}{\rho^{(e)}} \exp \left(- \frac{T_d}{T} \right) \left\{ m_A \left(\frac{\pi m_A k}{h^2} \right)^{3/2} (T_r T_v)^{1/2} \left(\frac{T}{T_v} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp \left(- \frac{T_v}{T} \right) \right] \frac{(Q_A^e)^2}{Q_{A_2}^e} \right\}. \quad (4.48)$$

Здесь T_d — диссоциационная характеристическая температура, равная

$$T_d = D / (R / (2 M_A)), \quad D = \Delta E_0 / (2 M_A); \quad (4.49)$$

D — энергия диссоциации на единицу массы молекул, ΔE_0 — энергия диссоциации на один моль исходного вещества (молекул).

Таким образом, для определения константы равновесия K_c необходимо знать характеристические температуры: диссоциационную T_d , колебательную T_v , вращательную T_r , а также электронные суммы

Таблица 7

	$M_i \left(\frac{\text{г}}{\text{моль}} \right)$	$m_i (\text{г})$	$T_d (\text{К})$	$T_v (\text{К})$	$T_z (\text{К})$
O_2	32	$5,312 \cdot 10^{-23}$	59000	2270	2,08
N_2	28	$4,648 \cdot 10^{-23}$	113200	3390	2,89

состояний для основных компонент воздуха. Данные по характеристическим температурам приводятся в табл. 7 [218].

Электронные суммы состояний записываются в виде (см. цитированную только что работу Хансена [218])

$$\begin{aligned}
 Q_{O_2}^e &= 3 + 2 \exp(-11390/T) + \exp(-18990/T), \\
 Q_O^e &= 5 + 3 \exp(-223/T) + \exp(-326/T) + \\
 &+ 5 \exp(-22800/T) + \exp(-48600/T), \\
 Q_{N_2}^e &= 1, \quad Q_N^e = 4 + 10 \exp(-27700/T) + 8 \exp(-41500/T).
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Из равенств (4.50) следует, что в рассматриваемом диапазоне изменения температуры (2000 ÷ 8000 К) необходимые для расчета констант равновесия отношения электронных сумм состояний для кислорода и азота изменяются незначительно, поэтому можно приближенно положить

$$(Q_O^e)^2 / Q_{O_2}^e = 27, \quad (Q_N^e)^2 / Q_{N_2}^e = 16. \tag{4.51}$$

Если принять допущение (4.51) о постоянстве отношения электронных сумм состояний (для азота это допущение выполняется с высокой степенью точности, а для кислорода погрешность не превышает 10 ÷ 12%), то выражение для константы равновесия (4.48) можно записать в следующей форме:

$$K_c = 2 \frac{\rho_d}{\rho(e)} \left(\frac{T}{T_v} \right)^{1/2} \left[1 - \exp\left(-\frac{T_v}{T}\right) \right] \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right). \tag{4.52}$$

Здесь

$$\rho_d = \frac{m_A}{2} \left(\frac{\pi m_A k}{h^2} \right)^{3/2} (T_z T_v)^{1/2} \frac{(Q_A^e)^2}{Q_{A_2}^e} \tag{4.53}$$

— так называемая характеристическая плотность. Диссоциирующий газ, равновесное состояние которого описывается равенством (4.52) ($\rho_d = \text{const}$), получил название "частично возбужденного диссо-

Таблица 8

T, K		1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000
$\rho_{dL} \left(\frac{r}{\text{см}^3} \right)$	O ₂	145	170	166	156	144	133	123
	N ₂	113	135	136	133	128	123	118

ширующего газа" [219]. Для кислорода при условии выполнения равенства (4.51) $\rho_d = 151 \text{ г/см}^3$. Для азота при том же условии $\rho_d = 107 \text{ г/см}^3$ [219].

Расчет комплекса

$$\rho_{dL} = 2 \rho_d \left(\frac{T}{T_v} \right)^{1/2} \left[1 - \exp \left(- \frac{T_v}{T} \right) \right], \quad (4.54)$$

входящего в правую часть равенства (4.52), показывает, что для таких газов, как кислород и азот величина ρ_{dL} изменяется в широком интервале температур сравнительно мало. Это видно из табл.8, заимствованной из работы Лайтхилла [220].

Отмеченная особенность в характере изменения ρ_{dL} была использована Лайтхиллом, предложившим модель "идеально диссоциирующего газа", в котором одним из основных допущений является допущение о постоянстве величины ρ_{dL} , имеющей, так же как и ρ_d , размерность плотности. Величина ρ_{dL} получила название характеристической плотности идеально диссоциирующего газа. Для кислорода и азота значения ρ_{dL} могут быть приняты равными

150 г/см^3 и 130 г/см^3 соответственно (другие свойства идеально диссоциирующего газа будут рассмотрены в следующем параграфе). Таким образом, для идеально диссоциирующего газа выражение (4.52) для константы равновесия K_c с учетом соотношения (4.54) принимает вид

$$K_c = \frac{\rho_{dL}}{\rho^{(e)}} \exp \left(- \frac{T_d}{T} \right), \quad (\rho_{dL} = \text{const}). \quad (4.55)$$

Подставив теперь выражение (4.55) для константы равновесия K_c в равенства (4.44) и (4.45), получим следующие эквивалентные друг другу соотношения для определения массовой скорости образования атомарной компоненты:

$$w_A = \rho^2 c_{A_2} \left[1 - \frac{\rho}{\rho_{dL}} \exp \left(\frac{T_d}{T} \right) \frac{c_{A_2}^2}{c_{A_2}} \right] \sum_{s=1}^N k_{ds} (c_{Xs} / M_{Xs}), \quad (4.56)$$

$$w_A = 2 \rho^3 c_{A_2} M_A^{-1} \left[\frac{\rho_{dL}}{\rho} \exp \left(- \frac{T_d}{T} \right) - \frac{c_{A_2}^2}{c_{A_2}} \right] \sum_{s=1}^N k_{vs} (c_{Xs} / M_{Xs}). \quad (4.57)$$

В тех случаях, когда различие в константах скоростей диссоциации (или, что то же самое, рекомбинации) незначительно и можно ограничиться введением одной константы, равенства (4.56) и (4.57) применительно к бинарной смеси ($c_A + c_{A_2} = 1$) записываются в форме

$$w_A = \frac{1}{2} \rho^2 (1 - c_A^2) M_A^{-1} k_d \left[1 - \frac{\rho}{\rho_{dL}} \exp\left(\frac{T_d}{T}\right) \frac{c_A^2}{1 - c_A} \right], \quad (4.58)$$

$$w_A = \rho^3 (1 - c_A^2) M_A^{-2} k_n \left[\frac{\rho_{dL}}{\rho} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right) - \frac{c_A^2}{1 - c_A} \right]. \quad (4.59)$$

Используя соотношения (4.46) и (4.55), нетрудно последние два выражения для массовой скорости образования атомарной компоненты представить в виде

$$w_A = \frac{1}{2} \rho^2 M_A^{-1} k_d \left(1 - \frac{c_A}{c(e)^2} \right), \quad (4.60)$$

$$w_A = \rho^3 M_A^{-2} k_n (1 + c_A) \frac{c_A^{(e)^2} - c_A^2}{1 - c(e)^2}. \quad (4.61)$$

Приравняв правые части равенств (4.60) и (4.61), найдем после простых преобразований выражение для константы равновесия

$$K_n = \frac{k_d}{k_n} = \frac{4\rho}{RT} \frac{c_A^{(e)^2}}{1 - c(e)^2}. \quad (4.62)$$

Константы скоростей реакций в общем случае зависят от температуры по закону Аррениуса (см. формулу (4.30)), т.е. возрастают с температурой по экспоненциальному закону. Константа скорости рекомбинации атомов является исключением из этого правила, так как реакция рекомбинации протекает без затрат энергии на активацию ($E_{a_n} = 0$). Выражение для константы скорости рекомбинации имеет вид

$$k_n = Z_n(T). \quad (4.63)$$

Для реакций рекомбинации, протекающих в воздухе, k_n хорошо аппроксимируется степенной зависимостью от температуры вида (см. табл. 6)

$$k_n = A_n T^{-n} \quad (0 \leq n \leq 2).$$

Константы равновесия K_n для важнейших реакций, протекающих в воздухе при температурах от 3000 до 8000 K, были аппрокси-

Таблица 9

Реакция	Константа равновесия	Размерность
$O_2 + X \rightleftharpoons 2O + X$	$1,2 \cdot 10^3 T^{-1/2} \exp(-118\,000/RT)$	моль/см ³
$N_2 + X \rightleftharpoons 2N + X$	$18 \exp(-224\,900/RT)$	моль/см ³
$N + O + X \rightleftharpoons NO + X$	$4,0 \exp(-150\,000/RT)$	моль/см ³
$N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$	$4,5 \exp(-75\,000/RT)$	1
$NO + O \rightleftharpoons O_2 + N$	$0,24 \exp(-32\,020/RT)$	1
$N_2 + O_2 \rightleftharpoons 2NO$	$19 \exp(-42\,980/RT)$	1

мированы Реем (см. уже цитированную в этом параграфе работу Рея [216]) соотношениями вида

$$K_n = AT^n \exp\left(-\frac{\Delta E_0}{RT}\right). \quad (4.64)$$

Результаты аппроксимаций (с погрешностью менее 10%) приведены в табл. 9.

В табл. 10 приведены значения констант скоростей реакций, протекающих в воздухе, рекомендуемые в монографии Е.В. Ступоченко, С.А. Лосева, А.И. Осипова [221].

22.7 Граничные условия на каталитической поверхности. Граничные условия на каталитической стенке в общем случае имеют вид (4.39). Для реакций каталитической рекомбинации условия на поверхности обычно далеки от термодинамического равновесия $[A]_w \gg [A]^{(e)}$

поэтому вторым членом в правой части равенства (4.39) можно пренебречь по сравнению с первым. В этом случае соотношение (4.39) примет вид

$$j_{A,w} = -k_w (\rho c_A)_w^n. \quad (4.65)$$

Используя выражение для диффузионного потока i -й компоненты (4.150), приведем равенство (4.65) к виду

$$\left(\rho \partial_A \frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_w = k_w (\rho c_A)_w^n. \quad (4.66)$$

Здесь k_w — константа скорости каталитической рекомбинации, зависящая от температуры по закону Аррениуса (4.40), n — порядок реакции.

Таблица 10

Реакция		X	$k_i (\text{см}^3 / \text{моль} \cdot \text{с})$
1	$\text{O}_2 + \text{X} \rightarrow 2\text{O} + \text{X}$ $\Delta E_0 = 118 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	O_2	$5,2 \cdot 10^{10} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^3 \exp(-\Delta E_0 / RT)$
		N_2	$2,5 \cdot 10^{11} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^{4,5} \exp(-\Delta E_0 / RT)$
		O	$6,25 \cdot 10^{12} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^{4,5} \exp(-\Delta E_0 / RT)$
		N, NO	$k_i(\text{O}_2)$
		Ar	$4,2 \cdot 10^{11} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT) \exp(-\Delta E_0 / RT)$
2	$\text{N}_2 + \text{X} \rightarrow 2\text{N} + \text{X}$ $\Delta E_0 = 225 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	N_2	$4,25 \cdot 10^{11} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^{2,2} \exp(-\Delta E_0 / RT)$
		N	$1,85 \cdot 10^{12} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^{4,5} \exp(-\Delta E_0 / RT)$
		$\text{O}_2, \text{O}, \text{NO}$	$k_i(\text{N}_2)$
		Ar	$6,8 \cdot 10^{11} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^{4,5} \exp(-\Delta E_0 / RT)$
3	$\text{NO} + \text{X} \rightarrow \text{N} + \text{O} + \text{X}$ $\Delta E_0 = 150 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$\text{O}_2, \text{N}_2, \text{Ar}$	$7 \cdot 10^{10} \cdot T^{1/2} (\Delta E_0 / RT)^2 \exp(-\Delta E_0 / RT)$
		O, N, NO	$20 k_i(\text{Ar})$
4	$\text{O} + \text{N}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{N}$		$7 \cdot 10^{18} \exp(-75500 / RT)$
5	$\text{N} + \text{O}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{O}$		$1,3 \cdot 10^{10} T \exp(-7100 / RT)$
6	$\text{N}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}$		$9,1 \cdot 10^{24} T^{-5/2} \exp(128500 / RT)$

При невысоких температурах стенки реакции типа (4.34) идут по первому порядку, т.е. $n = 1$.

Из выражения (4.66) следует, что при $k_w = 0$ $(\partial c_A / \partial y)_w = 0$, что соответствует химически изолированной (абсолютно некаталитической) поверхности; при $k_w \rightarrow \infty$ $c_{Aw} \rightarrow 0$, что соответствует абсолютно каталитической стенке.

В настоящее время сведения о константах скоростей реакций каталитической рекомбинации азота и кислорода на различных поверхностях весьма ограничены. Некоторые из имеющихся результатов представлены на рис. 67, заимствованном из работы Гуларда

Статистическая термодинамика приводит к следующим выражениям для энтальпии и внутренней энергии газовой смеси:

$$h = \sum_i c_i h_i = \sum_i c_i \left[\frac{R}{M_i} T^2 \left(\frac{\partial \ln Q_{i,p}}{\partial T} \right) + h_i^0 \right], \quad (4.69)$$

$$E = \sum_i c_i E_i = \sum_i c_i \left[\frac{R}{M_i} T^2 \left(\frac{\partial \ln Q_{i,c}}{\partial T} \right) + h_i^0 \right]. \quad (4.70)$$

Здесь $Q_{i,p}$ - сумма состояний i -й компоненты газовой смеси с единичным давлением, определяемая равенствами (4.25) - (4.28), $Q_{i,c}$ - сумма состояний i -й компоненты газовой смеси с единичной концентрацией:

$$Q_{i,c} = \frac{p}{RT} Q_{i,p}, \quad (4.71)$$

Q_i выражается равенствами (4.26) - (4.28), h_i^0 - энергия образования i -й компоненты на единицу массы при температуре абсолютного нуля.

Для бинарной смеси атомов и молекул с невозбужденными электронными состояниями подстановка $Q_{i,p}$ и $Q_{i,c}$ в соотношения (4.69) и (4.70) соответственно дает

$$h = \left[\frac{7}{2} + \frac{3}{2} c_A + (1 - c_A) \frac{T_v/T}{e^{T_v/T} - 1} \right] \frac{R}{2M_A} T + c_A D, \quad (4.72)$$

$$E = \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2} c_A + (1 - c_A) \frac{T_v/T}{e^{T_v/T} - 1} \right] \frac{R}{2M_A} T + c_A D. \quad (4.73)$$

В приведенных выражениях для энтальпии и внутренней энергии частично возбужденного диссоциирующего газа третий член в квадратных скобках описывает вклад колебательных степеней свободы в энтальпию и внутреннюю энергию. Величина этого члена при изменении температуры от 0 до ∞ изменяется от 0 до $(1 - c_A)$.

Максимальный вклад колебательных степеней свободы имеет место при $c_A = 0$ и составляет около 20% всей энтальпии и 30% всей внутренней энергии.

При высоких температурах, когда диссоциация становится заметной, выражения (4.72) и (4.73) можно упростить, положив $(T_v/T) [\exp(T_v/T) - 1] = \frac{1}{2}$. Согласно этому допущению, лежащему, наряду с допущением о постоянстве характеристической плотности ($\rho_{HL} = \text{const}$), в основе модели идеально диссоциирующего газа Лайтхилла, предполагается, что молекулы газа независимо от температуры возбуждены по колебательным степеням свободы на величину, равную половине величины "классического" возбуждения

колебаний молекул. Это допущение не приводит к существенной погрешности при высоких температурах, так как с ростом температуры уменьшается концентрация молекул $(1 - c_A)$ и увеличивается вклад члена $c_A D$. Таким образом, для идеально диссоциирующего газа будем иметь

$$h = (4 + c_A)(R/(2M_A))T + c_A D, \quad (4.74)$$

$$E = 3(R/(2M_A))T + c_A D. \quad (4.75)$$

Далее, имея выражение для энтальпии и внутренней энергии идеально диссоциирующего газа, определим "эффективные" удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Согласно определению удельные теплоемкости смеси газов при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v равны соответственно

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v. \quad (4.76)$$

Подставляя в зависимости (4.76) выражения для h и E из соотношений (4.74) и (4.75) и принимая во внимание равенство (4.68), найдем "эффективные" удельные теплоемкости идеально диссоциирующего газа, находящегося в равновесном состоянии

$$\frac{c_p}{R/(2M_A)} = 4 + c_A + \frac{1}{2} c_A (1 - c_A^2) \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)^2, \quad (4.77)$$

$$\frac{c_v}{R/(2M_A)} = 3 + \frac{c_A (1 - c_A)}{2 - c_A} \left(\frac{T_d}{T} \right)^2. \quad (4.78)$$

Из последних двух равенств видно, что предположение о наличии постоянного возбуждения колебательных степеней свободы приводит к тому, что отношение удельных теплоемкостей у идеально диссоциирующего газа до начала диссоциации оказывается равным $c_p/c_v = 1,33$, а не 1,4, как у реальных двухатомных газов при отсутствии возбуждения колебательных степеней свободы. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что в идеально диссоциирующем газе

Таблица 11

	T_d (K)	ρ_{dL} (г/см ³)	p_d (атм)
O_2	59 000	150	$2,3 \cdot 10^7$
N_2	113 200	130	$4,1 \cdot 10^7$

удельные теплоемкости при постоянном объеме на единицу массы у молекул и атомов оказываются одинаковыми $c_{vA} = c_{vA_2}$, так как число степеней свободы молекул (шесть) оказывается вдвое большим числа степеней свободы атомов (три).

В различных газодинамических исследованиях, в том числе и при исследовании пограничных слоев в диссоциирующих газах, иногда полезным оказывается введение характеристического давления идеально диссоциирующего газа

$$p_d = (R/(2M_A)) \rho_{dL} T_d. \quad (4.79)$$

Значения p_d для кислорода и азота наряду с другими величинами, определяющими свойства идеально диссоциирующего кислорода и азота, приведены в табл. 11.

Выражение для определения равновесной концентрации атомов в идеально диссоциирующем газе в зависимости от температуры нетрудно получить из равенства (4.68), если использовать уравнение состояния для бинарной смеси, преобразованное с помощью формулы (4.79) к виду

$$p/p_d = (\rho/\rho_{dL})(T/T_d)(1+c_A). \quad (4.80)$$

Исключая плотность ρ из соотношений (4.68) и (4.80), после несложных преобразований будем иметь

$$c_A = [1 + (p/p_d)(T_d/T) \exp(T_d/T)]^{-1/2}. \quad (4.81)$$

В заключение параграфа (рис. 68) приведем результаты расчета равновесной концентрации атомов кислорода при давлении $p = 1$ атм и различных температурах для идеально диссоциирующего газа (пунктирная кривая, расчет по формуле (4.81) $\rho_{dL} = 150$ г/см³) и частично возбужденного диссоциирующего газа (сплошная кривая, $\rho_d = 151$ г/см³). Как видно из рис. 68, заимствованного из уже цитированной ранее работы Гласса и Такано [219], различие между равновесными концентрациями идеально диссоциирующего и частично возбужденного диссоциирующего газов невелико.

§ 24. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

О ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СПОСОБНОСТИ СТЕНКИ

24.1. Основные уравнения и формальные граничные условия.

Ограничимся рассмотрением стационарного плоского течения в пограничном слое вблизи поверхности, обладающей произвольной каталитической способностью. В этом случае система уравнений переноса имеет вид (2.81). Входящие в эту систему проекции на

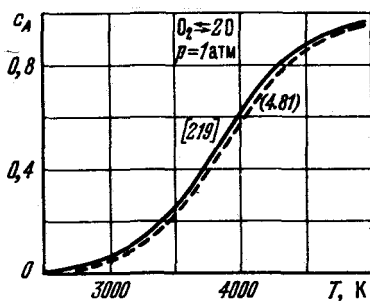


Рис. 68.

ось y полных векторов плотности потоков количества движения τ_{Σ} , массы i -й компоненты $j_{i\Sigma}$, энергии q_{Σ} выражаются равенствами (2.78) – (2.80). Примем для турбулентных составляющих этих потоков "градиентное" представление, введя для этой цели турбулентные аналоги коэффициентов вязкости, диффузии и теплопроводности

$$\begin{aligned}\mu_T &= - \frac{\rho \overline{v'' u''}}{\partial u / \partial y}, & \lambda_T &= - \frac{\overline{v'' c''}}{\partial c_i / \partial y}, \\ \lambda_T &= - \frac{\rho \overline{v'' h''}}{\partial T / \partial y} = - \frac{\sum_i c_i \rho \overline{v'' h''}_i}{\partial T / \partial y}.\end{aligned}\quad (4.82)$$

С учетом равенств (4.82) соотношения (2.78) – (2.80) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\tau_{\Sigma} &= (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y}, & j_{i\Sigma} &= \rho c_i \bar{V}_{iy} + \rho \lambda_T \frac{\partial c_i}{\partial y}, \\ q_{\Sigma} &= q_y + \sum_i \rho \lambda_T \frac{\partial c_i}{\partial y} h_i + \lambda_T \frac{\partial T}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4.83)$$

Первые члены в правых частях равенств (4.83) характеризуют молекулярные процессы переноса количества движения вещества и энергии, прочие члены – турбулентный перенос тех же субстанций.

Второе и третье соотношения (4.82), как нетрудно видеть, содержат допущение о пассивности турбулентных "носителей" по отношению к переносимым субстанциям: коэффициенты турбулентной диффузии и теплопроводности приняты одинаковыми для всех компонент смеси. Это допущение представляется естественным, поскольку в настоящее время отсутствуют какие-либо опытные данные, позволяющие провести переоценку общепринятой гипотезы пассивности.

Ранее (в п. 1.3.2) уже отмечалось, что полуэмпирическая теория турбулентной теплопроводности для пристенных течений развита в гораздо меньшей степени по сравнению с теорией переноса количества движения. Еще в большей мере это замечание справедливо применительно к турбулентной диффузии в многокомпонентных смесях. Указанные обстоятельства приводят к необходимости использования аналогий различного рода. Простейшая форма аналогии может быть получена путем введения турбулентных аналогов чисел Прандтля и Шмидта

$$Pr_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}, \quad Sc_T = \frac{\mu_T}{\rho \lambda_T} \quad (4.84)$$

и принятия некоторых более или менее обоснованных допущений о

характере изменения этих чисел поперек пограничного слоя. Наиболее широко используется допущение о постоянстве этих чисел в сечениях слоя (состояние проблемы турбулентного числа Прандтля в однородном потоке было рассмотрено в п. 13.2); следует, однако, иметь в виду, что фактические данные по числам Pr_T и Sc_T в многокомпонентных смесях практически отсутствуют.

Если использовать равенства (4.84), то второе и третье из соотношений (4.83) примут вид

$$\delta_{1\Sigma} = \rho c_i \bar{V}_{1y} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \frac{\partial c_i}{\partial y}, \quad (4.85)$$

$$q_\Sigma = q_y + \sum_i \frac{\mu_T}{Sc_T} \frac{\partial c_i}{\partial y} h_i + \frac{\mu_T c_p}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (4.86)$$

Иногда вместо турбулентного числа Шмидта используется турбулентное число Льюиса

$$Le_T = \rho \theta_T c_p / \lambda_T = Pr_T / Sc_T. \quad (4.87)$$

Принимая во внимание (4.87), а также соотношение (2.135), преобразуем выражение для полного теплового потока (4.86) к виду

$$q_\Sigma = q_y + \frac{\mu_T}{Pr_T} \left[\frac{\partial h}{\partial y} + (Le_T - 1) \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right]. \quad (4.88)$$

С учетом первого из соотношений (4.83), а также выражений (4.83) и (4.88) система уравнений переноса в турбулентном пограничном слое в многокомпонентной смеси газов (2.81) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} &= w_i + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho c_i \bar{V}_{1y} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right), \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ q_y + \frac{\mu_T}{Pr_T} \left[\frac{\partial h}{\partial y} + (Le_T - 1) \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] + \right. \\ &\quad \left. + u(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Последнее уравнение системы (4.89), записанное через энтальпию смеси h , преобразуется к форме

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho y + \frac{\mu_T}{Pr_T} \left[\frac{\partial h}{\partial y} + (Le_T - 1) \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] + (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (4.90)$$

Входящие в уравнение (4.89), (4.90) молекулярные параметры: проекция скорости диффузии i -й компоненты на ось y $\bar{V}_{iy}$ и проекция вектора плотности потока энергии на ось y q_y могут быть определены в общем случае по соотношениям Стефана — Максвелла (1.91) и соотношению (1.99) соответственно.

Система уравнений переноса (4.89) удобна для применения как в рамках дискретных схем турбулентного пограничного слоя (например, классической прандтлевской схемы), так и схем, использующих понятие эффективной вязкости. В первом случае, т.е. при делении слоя на области вязкого подслоя и турбулентного ядра, следует в области подслоя пренебречь в правых частях системы уравнений (4.89) членами, содержащими турбулентную вязкость (положить $\mu_T = 0$); в области ядра следует опустить молекулярные параметры ($\mu = 0$, $\bar{V}_{iy} = 0$, $q_y = 0$). При использовании современных двухслойных схем, предусматривающих деление слоя на внутреннюю и внешнюю области (подробности см. в § 10, 11), следует во внутренней области положить $\mu_T = \mu_{эфф} - \mu$ и принять гипотезу о характере изменения турбулентных аналогов чисел Прандтля и Шмидта поперек области (обычно принимается $Pr_T = \text{const}$, $Sc_T = \text{const}$); во внешней области следует просто опустить молекулярные параметры ($\mu = 0$, $\bar{V}_{iy} = 0$, $q_y = 0$).

Гипотезы турбулентности, в том числе гипотезы эффективной вязкости, достаточно подробно рассмотрены в § 11.

Граничные условия для системы уравнений (4.89) могут быть составлены следующим образом.

Для непроницаемой стенки граничные условия для проекций скорости имеют обычный вид

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u \rightarrow U_e & \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Граничные условия для полной энтальпии формально могут быть записаны в форме

$$h = h_w \quad \text{при} \quad y = 0, \quad h \rightarrow h_e \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.92)$$

Здесь h_w — энтальпия на стенке и h_e — энтальпия на внешней гра-

нише пограничного слоя, как это следует из определения полной энтальпии

$$H = h + \frac{u^2}{2}, \quad h = \sum_i c_i h_i, \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0, \quad (4.93)$$

выражаются соответственно равенствами

$$h_w = \sum_i c_{iw} \left(\int_0^{T_w} c_{pi} dT + h_i^0 \right), \quad (4.94a)$$

$$H_e = \sum_i c_{ie} \left(\int_0^{T_e} c_{pi} dT + h_i^0 \right) + \frac{U_e^2}{2}. \quad (4.94b)$$

Температура стенки T_w либо должна быть задана из каких-либо соображений, либо может рассматриваться как параметр задачи. В общем случае температура стенки может быть определена из условия теплового баланса на границе газ – твердое тело на основе "стыковки" решений задач о теплообмене в пограничном слое и теплопроводности в твердом теле. Значения концентраций c_{ie} и температуры T_e на внешней границе пограничного слоя, также входящие в соотношения (4.94a) и (4.94b), должны быть определены из решения внешней задачи.

Значения концентраций на стенке c_{iw} в общем случае при наличии химических реакций на поверхности заранее неизвестны и должны определяться в процессе решения задачи. Лишь в некоторых частных случаях значения c_{iw} могут быть заданы заранее. Подробно проблема граничных условий на внешней границе и стенке с произвольной каталитической способностью будет рассмотрена применительно к диссоциирующему воздуху в следующем параграфе. Здесь же ограничимся формальной записью граничных условий для концентраций в виде

$$c_i = c_{iw} \quad y = 0, \quad c_i = c_{ie} \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.95)$$

24.2. Различные режимы течения в пограничном слое: равновесное, замороженное и неравновесное течения, Способы описания состава смеси. Характер течения в пограничном слое при протекании химических реакций во внешнем потоке и в самом пограничном слое зависит от соотношения между скоростями конвективного и диффузионного переноса, с одной стороны, и скоростью химической реакции, с другой.

Обратимся к уравнению переноса атомарной компоненты (третье уравнение системы (4.89)), считая для простоты смесь бинарной, состоящей из атомов и молекул ($A_2 = 2A$), и пренебрегая баро- и

термодиффузией по сравнению с массовой диффузией. В качестве выражения для массовой скорости образования атомарной компоненты примем выражение (4.61). В результате указанных упрощений и подстановки (4.61) в уравнение диффузии будем иметь

$$\rho u \frac{\partial c_A}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right] + \rho^3 M_A^{-2} k_A (1 + c_A) \frac{c_A^{(e)2} - c_A^2}{1 - c_A^{(e)2}}.$$

Здесь Sc — число Шмидта для бинарной смеси.

Перейдем в этом уравнении к безразмерным величинам, введя в качестве масштаба длины характерный размер тела L , масштаб скорости — скорость набегающего потока U_∞ , масштабов плотности и вязкости — плотность и вязкость набегающего потока — $\bar{\rho}_\infty$ и $\bar{\mu}_\infty$. После перехода и простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial c_A}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial c_A}{\partial \bar{y}} - \frac{1}{Re_L} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[\left(\frac{\bar{\mu}}{Sc} + \frac{\bar{\mu}_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial c_A}{\partial \bar{y}} \right] = \\ = Da \bar{\rho}^3 (1 + c_A) \frac{c_A^{(e)2} - c_A^2}{1 - c_A^{(e)2}}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Здесь

$$Da = \frac{L/U_\infty}{1/(\bar{\rho}_\infty^2 M_A^{-2} K_A)}, \quad Re_L = \frac{\bar{\rho}_\infty U_\infty L}{\bar{\mu}_\infty}.$$

Безразмерный параметр Da , входящий в правую часть полученного уравнения, называется числом Дамкелера. Смысл числа Дамкелера нетрудно уяснить, рассмотрев в отдельности числитель и знаменатель в последнем равенстве. Действительно, нетрудно видеть, что величина L/U_∞ , стоящая в числителе, характеризует время нахождения частицы в пограничном слое ($t_{\text{потока}}$). Величина, стоящая в знаменателе, $1/(\bar{\rho}_\infty^2 M_A^{-2} K_A) = t_{\text{хим}}$, также имеет размерность времени. Эта величина характеризует продолжительность жизни атома и является характеристическим временем, определяющим скорость протекания химического процесса.

Таким образом, число Дамкелера представляет собой отношение двух характерных времен: времени нахождения частицы в потоке (времени диффузии) и времени протекания химической реакции, т.е.

$$Da = \frac{t_{\text{потока}}}{t_{\text{хим}}} = \frac{L/U_\infty}{1/(\bar{\rho}_\infty^2 M_A^{-2} k_A)}. \quad (4.97)$$

Если $Da \rightarrow 0$, то время протекания химической реакции много больше времени нахождения частицы в потоке ($t_{\text{хим}} \gg t_{\text{потока}}$), и, следовательно, влияние химических реакций в газовой фазе на поток в пограничном слое незначительно. В этом случае смесь газов в пограничном слое может рассматриваться как химически инертная, а течение в пограничном слое — как химически замороженное. Продукты диссоциации — атомы появляются в этом случае в пограничном слое только за счет конвекции. Для химически замороженного течения уравнение переноса атомарной компоненты упрощается, так как член, выражающий массовую скорость образования атомарной компоненты (источниковый член), обращается в ноль ($Da = 0$, $w_A = 0$). Это уравнение после возвращения к размерным величинам принимает вид

$$\rho u \frac{\partial c_A}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial c_A}{\partial y} \right]. \quad (4.98)$$

Отметим, что и в случае замороженного течения многокомпонентной смеси распределение концентраций компонент в слое определяется лишь процессами конвективного переноса и процессами диффузии, а уравнения переноса не содержат источниковых членов.

Если число Дамкелера велико ($Da \rightarrow \infty$), то время протекания химической реакции оказывается много меньше времени нахождения частицы в пограничном слое ($t_{\text{хим}} \ll t_{\text{потока}}$) и, следовательно, в каждой точке пограничного слоя будет успевать устанавливаться локальное термохимическое равновесие. В рассматриваемом простейшем случае течений бинарной смеси распределение концентраций атомарной компоненты не будет зависеть от процессов конвекции и диффузии, а будет зависеть лишь от местных значений температуры и давления. В этом случае уравнение диффузии (4.96) вырождается в алгебраическое соотношение для константы равновесия ($w_A = 0$)

$$\frac{c_A^2}{1 - c_A} = K_c(p, T).$$

Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае течения многокомпонентной реагирующей смеси подобный предельный переход ($Da \rightarrow \infty$) не является правомерным. Действительно, разделив обе части уравнения диффузии на число Дамкелера, нетрудно заметить, что параметр $(1/Da)$ при диффузионном члене играет роль малого параметра при старшей производной. Простое пренебрежение диффузионным членом при устремлении числа Дамкелера к бесконечности ($Da \rightarrow \infty$) приведет к понижению порядка уравнения, а следовательно, к невозможности удовлетворения всех граничных условий. Это обстоятельство вынуждает при расчете равновесных и околоравновесных течений использовать исходную систему уравнений диффузии без

каких-либо упрощений, что в свою очередь ведет к большим вычислительным трудностям, возникающим при интегрировании дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Чтобы избежать указанных трудностей, можно воспользоваться следующим приближенным приемом, существо которого сводится к редукции исходной системы уравнений диффузии.

Проиллюстрируем прием на примере течения диссоциирующего воздуха, состоящего из пяти компонент (O, O_2, N, N_2, NO), в котором протекают шесть химических реакций, описываемых системой уравнения (4.41). Из указанных шести реакций только три являются независимыми, т.е. такими реакциями, которые отличаются хотя бы одним реагентом.

В строгой постановке для описания состава указанной движущейся пятикомпонентной смеси необходимо использовать четыре уравнения диффузии

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{\partial}{\partial y} j_{i\Sigma} \quad (4.99)$$

($i = O, N, NO, O_2$)

и условие равенства единице суммы массовых концентраций всех компонент

$$\sum_{i=1}^5 c_i = 1. \quad (4.100)$$

Число уравнений диффузии с источниковым членом в рассматриваемом случае можно без ущерба для строгости постановки задачи уменьшить на единицу. Для этого следует воспользоваться уравнением диффузии для одного из двух элементов, образующих все компоненты смеси.

Введем в рассмотрение концентрацию k -го элемента в i -й компоненте

$$c_{ki} = M_k N_k / M_i. \quad (4.101)$$

Здесь M_k - атомный вес k -го элемента, N_k - число атомов k -го элемента в i -й компоненте, M_i - молекулярный вес i -й компоненты.

Умножая уравнение диффузии для i -й компоненты на c_{ki} и производя суммирование по всем компонентам смеси, получим в общем случае N_3 уравнений диффузии для N_3 элементов

$$\rho u \frac{\partial c_k^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_k^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} j_{k\Sigma}^* \quad (k=1, 2, \dots, N_3). \quad (4.102)$$

Здесь

$$c_k^* = \sum_{i=1}^N c_{ki} c_i \quad (k=1, 2, \dots, N_3) \quad (4.103)$$

- концентрация k -го элемента смеси, а величина

$$j_{k\Sigma}^* = \sum_i c_{ki} j_{i\Sigma} \quad (4.104)$$

может быть названа диффузионным потоком k -го элемента.

Величина $w_i c_{ki}$ представляет собой массовую скорость перехода элемента k в состав компоненты i . Так как в процессе химической реакции масса элемента сохраняется, то

$$\sum_i c_{ki} w_i = w_k^* = 0. \quad (4.105)$$

В рассматриваемом частном случае течения двухэлементной смеси ($N_g = 2$) одно из уравнений (4.102) может быть заменено более простым условием равенства единице суммы концентраций всех элементов

$$\sum_k c_k^* = 1. \quad (4.106)$$

Таким образом, в рамках строгой постановки задача свелась к необходимости интегрирования трех уравнений диффузии для компонент (4.99) (например, $i = O, N, NO$), одного уравнения диффузии элементов (4.102) (например, элемента кислорода) и использование условия (4.100) (или эквивалентного ему условия (4.106)).

Для концентраций элементов кислорода (c_O^*) и азота (c_N^*)

имеем в соответствии с определением (4.103) следующие выражения

$$c_O^* = c_O + \frac{2M_O}{M_{O_2}} c_{O_2} + \frac{M_O}{M_{NO}} c_{NO}, \quad (4.107)$$

$$c_N^* = c_N + \frac{2M_N}{M_{N_2}} c_{N_2} + \frac{M_N}{M_{NO}} c_{NO}.$$

Из этих соотношений лишь одно является независимым, поскольку в соответствии с условием (4.106)

$$c_O^* + c_N^* = 1.$$

Уравнение диффузии элементов, как это ясно из определения, описывает перенос элементов в пограничном слое. В качестве граничного условия на стенке для этого уравнения можно использовать условие равенства нулю диффузионного потока элемента, если стенка непроницаема,

$$j_{k\Sigma}^* = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (4.108)$$

Элементный состав смеси на внешней границе должен быть известным, т.е.

$$c_k^* \rightarrow c_{ke}^* \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.109)$$

Из приведенного анализа следует, что только в частном случае одноэлементной смеси ($A_2 = 2A$) элементный состав смеси, естественно, постоянен по сечению пограничного слоя.

В общем случае течения многокомпонентной и многоэлементной смеси при различии в диффузионных свойствах отдельных компонент элементный состав смеси может изменяться по сечению слоя, и это обстоятельство (эффект диффузии элементов) должно быть оценено. Ясно, что в области развитого турбулентного движения, например во внешней области пограничного слоя, эффект диффузии элементов проявляться не будет, поскольку для всех компонент смеси коэффициенты турбулентной диффузии одинаковы (гипотеза пассивности). Во внутренней (пристеночной) области при использовании гипотез эффективной вязкости (диффузии) диффузия элементов будет иметь место постольку, поскольку различаются молекулярные диффузионные свойства отдельных компонент.

Возвращаясь к рассмотрению приближенного приема описания равновесных течений, укажем, что этот прием сводится к замене уравнений диффузии для компонент выражениями для констант равновесия. Иными словами, применительно к рассматриваемой пятикомпонентной смеси три уравнения диффузии (4.99) (для $i = 0, N, N_0$) заменяются на выражения для констант равновесия

$$K_{c1} = \frac{c_0^2}{c_{O_2}}, \quad K_{c2} = \frac{c_N^2}{c_{N_2}}, \quad K_{c3} = \frac{c_{N_0}}{c_N c_O}. \quad (4.110)$$

Помимо трех соотношений (4.110), используется уравнение диффузии элемента (4.102) для одного из элементов и условия (4.100) (или 4.106). Отметим, что использование выражений для констант равновесия других реакций (4.41) не приводит к цели, поскольку лишь три из шести реакций являются независимыми (константы равновесия оставшихся трех реакций могут быть определены через константы независимых реакций).

При указанном подходе нестрогий предельный переход ($Da \rightarrow \infty$) от дифференциальных уравнений диффузии компонент (4.99) к алгебраическим соотношениям (4.110) совершается лишь в части уравнений (трех из четырех), четвертое из уравнений (диффузии элементов) является строгим, что позволяет учесть переменность элементного состава.

В ранних работах по исследованию характеристик пограничных слоев в многокомпонентных реагирующих смесях (обзор работ по турбулентному пограничному слою в диссоциирующем газе приведен в § 21) обычно эффектом диффузии элементов пренебрегалось: элементный состав смеси по сечению слоя принимался постоянным, т.е. таким же, как во внешнем потоке. Лишь в начале 70-х годов в работе О.Н. Суслова, Г.А. Тирского, В.В. Шенникова [198] было обращено внимание на возможные последствия неучета этого эффекта. Последовавшие затем исследования позволили оценить роль этого эффекта в некоторых конкретных газодинамических ситуациях.

Результаты, относящиеся к турбулентным пограничным слоям, были отмечены в обзоре (§ 21); ниже некоторые из этих результатов будут рассмотрены более подробно.

В заключение вернемся к рассмотрению уравнения (4.96). При не слишком малых и не слишком больших числах Демкелера течение в пограничном слое будет неравновесным. Для описания таких течений необходимо использовать исходные уравнения диффузии компонент (или элементов) без каких-либо упрощений, однако при расчете околоравновесных режимов целесообразно перейти к одному из упрощенных способов описания состава смеси, рассмотренных выше, что позволяет существенно уменьшить затраты машинного времени. Выбор способа описания зависит от конкретных целей исследования. Если в результате расчетов необходимо оценить лишь интегральные характеристики течения (трение, тепловые потоки), то во многих случаях можно использовать редукцию уравнений диффузии в уравнения типа (4.110) и условие постоянства элементного состава смеси по сечению слоя. Если возникает необходимость в достаточно аккуратном описании полей концентраций, то следует отказаться от последнего условия и учесть диффузию элементов.

§ 25. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Расчет тепловых нагрузок на затупленных телах, движущихся со сверхзвуковыми скоростями, включает в качестве обязательного этапа определение характеристик потока на внешней границе пограничного слоя. Рассмотрим такие режимы обтекания затупленных тел, при которых весь поток за головной волной можно разделить на невязкое течение в ударном слое и течение в пограничном слое. Расчет параметров невязкого течения можно для удобства разбить на три этапа: 1) расчет параметров потока непосредственно за ударной волной; 2) определение термодинамических параметров в точке торможения (критической точке); 3) расчет параметров потока вдоль по обводу тела. Остановимся подробно на каждом из этих этапов.

25.1. Расчет параметров потока непосредственно за прямым скачком уплотнения. Условия сохранения массы, количества движения и энергии при переходе газа через прямой скачок уплотнения имеют вид [6]

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2, \quad (4.111)$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2, \quad (4.112)$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}. \quad (4.113)$$

Здесь индексы 1 и 2 означают параметры газа перед скачком (в набегающем потоке) и за скачком соответственно; V , p , ρ , h — скорость, давление, плотность и энтальпия газа.

К системе уравнений (4.111)–(4.113) следует добавить уравнение состояния для смеси газов

$$p = pRT \sum_i \frac{c_i}{M_i}, \quad (4.114)$$

где T – температура газа, c_i – массовая концентрация i -й компоненты, M_i – молекулярный вес i -й компоненты, R – универсальная газовая постоянная.

При температурах и давлениях газа, не превышающих значений, соответствующих правой крайней кривой на рис. 16, т.е. в области диссоциации, воздух можно рассматривать как смесь, состоящую из пяти компонент (O , O_2 , N , N_2 , NO) и двух химических элементов: кислорода O^* и азота N^* (см. п. 22.6). В этом случае

$$h = \sum_{i=1}^5 c_i h_i, \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0, \quad (4.115)$$

где h_i , c_{pi} – энтальпия и теплоемкость i -й компоненты, h_i^0 – энтальпия образования i -й компоненты при стандартных условиях (см. табл. 2).

Система уравнений (4.111)–(4.115) должна быть замкнута соотношениями для определения концентраций компонент смеси.

Будем считать, что газ за прямым скачком уплотнения находится в состоянии термохимического равновесия, т.е. его состав полностью определяется локальными значениями температуры и давления. В качестве независимых соотношений, связывающих концентрации компонент с температурой и давлением, примем даваемые законом действующих масс условия равновесия трех реакций диссоциации: $O = 2O$, $N_2 = 2N$, $NO = N + O$ (первые три реакции в табл. 9):

$$c_1^2 c_2^{-1} = K_{n1} \frac{RT}{pM} M_1^2 M_2^{-1}, \quad (4.116)$$

$$c_3^2 c_4^{-1} = K_{n2} \frac{RT}{pM} M_3^2 M_4^{-1} \quad (4.117)$$

$$c_1 c_3 c_5^{-1} = K_{n3} \frac{RT}{pM} M_1 M_3 M_5^{-1}. \quad (4.118)$$

Здесь K_{n1} , K_{n2} , K_{n3} – константы равновесия трех реакций диссоциации (их значения приведены также в табл. 9), M – молекулярный вес смеси

$$\frac{1}{M} = \sum_{i=1}^5 \frac{c_i}{M_i}. \quad (4.119)$$

К соотношениям (4.116)–(4.118) добавим очевидное для идеального газа условие постоянства концентрации химического элемента (например, O^*)

$$c_1 + c_2 + \frac{M_1}{M_5} c_5 = (c_0^*)_{\infty} \quad (4.120)$$

и условие равенства единице суммы всех массовых концентраций

$$\sum_{i=1}^5 c_i = 1. \quad (4.121)$$

Здесь и далее нумерация компонент соответствует следующему порядку: 1 – O , 2 – O_2 , 3 – N , 4 – N_2 , 5 – NO . Индекс ∞

в соотношении (4.120) относится к набегающему потоку ($c_{O^*}^* = 0,23$).

Соотношения (4.116)–(4.121) позволяют определить химический состав газа как функцию температуры и давления в заданной точке потока.

Систему уравнений перехода газа через скачок можно решить для двух "входных" условий – скорости $V = V_{\infty}$ и высоты полета H , причем последняя определяет значения температуры и давления в соответствии со стандартной атмосферой. Решение системы можно осуществить методом последовательных приближений по следующей схеме.

По заданным p_1 и T_1 определяется состав воздуха до ударной волны, что позволяет найти M_1 , h_1 и ρ_1 :

$$\rho_1 = p_1 M_1 / (R T_1)$$

(индекс 1 здесь не следует путать с номером компоненты O). Далее, задаваясь некоторым значением скорости за скачком V_2' , с помощью уравнений (4.111) и (4.112) можно получить

$$\rho_2 = \rho_1 V_1 / V_2'$$

и

$$p_2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2'^2.$$

С использованием найденного значения ρ_2 и уравнения состояния, записанного до и после скачка, итерационным способом можно определить температуру T_2 за скачком из соотношения

$$T_2 = \frac{V_2'}{V_1} \cdot \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} T_1.$$

Итерации на этом этапе необходимы в связи с тем, что T_2 определяется через молекулярный вес M_2 , зависящий в свою очередь нелинейно от T_2 через концентрации компонент. После этого по найденным ρ_2 и T_2 можно вычислить энтальпию h_2 . Последняя величина позволяет с помощью уравнения баланса энергии проверить

точность заданного значения V'_2 :

$$V''_2 = 2 \sqrt{h_1 - V_1^2 / 2 - h_2}.$$

Если выполнилось условие $|V''_2 - V'_2| < \varepsilon$ (малое число ε — степень точности решения), то итерации можно закончить; в противном случае следует задать новое значение V'_2 и процесс повторить.

Остановимся несколько подробнее на определении состава газа с помощью системы (4.116)–(4.121).

С использованием аппроксимаций для констант равновесия (табл. 9) первые три уравнения системы могут быть приведены к виду

$$c_1^2 c_2^{-1} = 24,51 \frac{\bar{T}^{1/2} \exp(-5997/\bar{T})}{Mp} \cdot 10^6, \quad (4.122)$$

$$c_2^2 c_4^{-1} = 10,34 \frac{\bar{T} \exp(-113,78/\bar{T})}{Mp} \cdot 10^6, \quad (4.123)$$

$$c_1 c_3 c_5^{-1} = 2,45 \frac{\exp(-76,00/\bar{T})}{Mp} \cdot 10^6, \quad (4.124)$$

где $\bar{T} = T/1000$ К, p — давление в атмосферах. Нелинейная алгебраическая система (1.122)–(1.124), (4.119)–(4.121) может быть решена при заданных T , p и $c_0^* = 0,23$ методом последовательных приближений следующим образом. Задается набор значений c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 в l -м приближении. По $c_1^{(l)}$ определяется M и, следовательно, правые части (4.122)–(4.124). Из пары значений $c_1^{(l)}, c_2^{(l)}$ выбирается большее и по нему с помощью (1.112) вычисляется другое. То же делается для пары $c_3^{(l)}, c_4^{(l)}$. По уравнению (1.124) определяется c_5 . Затем из соотношений (4.119)–(4.121) находятся значения тех концентраций, которые были подставлены в (4.122) и (4.123) и производится их сравнение. При отсутствии требуемой точности процесс повторяется.

До начала вычислений целесообразно сформировать таблицу концентраций компонент воздуха для $p = 10^{-8}, 10^{-7}, \dots, 10^2$ атм и для $T = 1, 2, \dots, 8$. Из нее путем интерполяции при данных p и T можно выбрать значения $(c_1^{(1)})$, используемые как первое приближение.

25.2. Расчет температуры и давления в точке торможения.

После перехода через скачок уплотнения поток газа имеет параметры V_2, p_2, T_2 . Затем происходит адиабатическое торможение газа вдоль нулевой линии тока до критической точки, где скорость становится равной нулю, а температура и давление —

значениям T_{0e} и p_{0e} (концентрации химических элементов по-прежнему сохраняются постоянными).

Для определения значений T_{0e} и p_{0e} , необходимых для последующего расчета, воспользуемся дифференциальной связью между энтальпией, давлением и плотностью [6], справедливой для всякого движения невязкого газа без внешнего подвода тепла:

$$dh = dp/\rho. \quad (4.125)$$

Поскольку энтальпия $h = \sum_i c_i(p, T) h_i(T)$ является в условиях термохимического равновесия функцией температуры и давления, имеем

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \ln T} d \ln T + \frac{\partial h}{\partial \ln p} d \ln p \quad (4.126)$$

(дифференцирование h по логарифму T и p удобнее с вычислительной стороны). Преобразуем $\partial h / \partial \ln T$ и $\partial h / \partial \ln p$:

$$\frac{\partial h}{\partial \ln T} = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{\partial c_i}{\partial \ln T} h_i + c_i \frac{\partial h_i}{\partial \ln T} \right) = \sum_{i=1}^5 (B_i h_i + c_i c_{pi} T), \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \ln p} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial c_i}{\partial \ln p} h_i = \sum_{i=1}^5 A_i h_i, \quad (4.128)$$

где обозначено

$$A_i = \partial c_i / \partial \ln p, \quad B_i = \partial c_i / \partial \ln T.$$

Таким образом, соотношение (4.125) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^5 (B_i h_i + c_i c_{pi} T) \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} \frac{RT}{M} - \sum_{i=1}^5 A_i h_i \frac{dp}{p},$$

или

$$\frac{\sum_{i=1}^5 (B_i h_i + c_i c_{pi} T) dT/T}{\frac{RT}{M} - \sum_{i=1}^5 A_i h_i} = \frac{dp}{p}.$$

Обозначая

$$\frac{\sum_{i=1}^5 (B_i h_i + c_i c_{pi} T)}{\frac{RT}{M} - \sum_{i=1}^5 A_i h_i} \cdot \frac{p}{T} = F(p, T),$$

запишем окончательно (4.125) в виде

$$F(p, T) dT = dp. \quad (4.129)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (4.129), выражающего связь между p и T вдоль нулевой линии тока, можно производить численно следующим образом. Пусть имеются значения T_j и p_j в j -й точке. По ним находится $F(p_j, T_j)$, значения T_{j+1} и p_{j+1} в $j+1$ -й точке вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T_{j+1} &= T_j + \Delta T, \\ p_{j+1} &= p_j + F(p_j, T_j) \Delta T. \end{aligned}$$

Начальные значения температуры и давления соответствуют параметрам газа за скачком уплотнения. Процесс вычисления интеграла уравнения (4.129) продолжается до тех пор, пока не будет выполнено с требуемой точностью условие

$$h(T_j, p_j) = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_{0e}, \quad (4.130)$$

соответствующее адиабатическому торможению газа.

Для нахождения величин $A_i = \partial c_i / \partial \ln p$ и $B_i = \partial c_i / \partial \ln T$ прологифицируем уравнения (4.122)–(4.124) и затем продифференцируем соответственно по переменным $\ln p$ и $\ln T$. Так, для A_i получим после простых преобразований следующую линейную относительно A_i систему:

$$A_1 \left(\frac{2}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \kappa_1 - \kappa_2 \right) + A_3 \kappa_3 + A_5 \frac{M_1}{M_5} \frac{1}{c_2} = -1, \quad (4.131)$$

$$A_1 (\kappa_1 - \kappa_2) + A_3 \left(\frac{2}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \kappa_3 \right) + A_5 \frac{M_3}{M_5} \frac{1}{c_4} = -1, \quad (4.132)$$

$$A_1 \left(\frac{1}{c_1} + \kappa_1 - \kappa_2 \right) + A_3 \left(\frac{1}{c_3} + \kappa_3 \right) + A_5 \left(-\frac{1}{c_5} \right) = -1, \quad (4.133)$$

где

$$\kappa_i = M \left(\frac{1}{M_i} - \frac{1}{M_5} \right).$$

После нахождения A_1, A_3, A_5 из соотношений

$$A_1 + A_2 + \frac{M_1}{M_5} A_5 = 0, \quad (4.134)$$

$$\sum_{i=1}^5 A_i = 0 \quad (4.135)$$

можно найти A_2 и A_4 .

Для определения B_1, B_3, B_5 нетрудно получить систему с теми же, что и в (4.131)–(4.133) коэффициентами в левых час-

тах и значениями правых частей в первой, второй и третьей строчках соответственно $\bar{T}_1^*/\bar{T}+1/2$, $\bar{T}_3^*/\bar{T}+1$, $\bar{T}_5^*/\bar{T}+1$, где $\bar{T}_1^* = 59,97$, $\bar{T}_3^* = 113,78$, $\bar{T}_5^* = 76,00$; значения B_2 и B_4 находятся с помощью равенств (4.134) и (4.135), в которых вместо A_i стоят B_i .

Вычислительные трудности при малых c_i , связанные с наличием обратных c_i величин в коэффициентах системы (4.131) – (4.133), легко устраняются умножением на соответствующие концентрации.

По изложенному методу были проведены систематические расчеты температуры и давления торможения в критической точке затупленного тела. Результаты расчетов представлены в виде номограмм на рис. 69, 70. По оси абсцисс на этих рисунках отложена скорость потока на бесконечности V_∞ в км/с, по оси ординат – высота полета H в км. На рис. 69 изображены линии равных значений температуры торможения, на рис. 70 – линии равных значений давления торможения.

25.3. Расчет параметров потока вдоль по обводу тела. В пп. 25.1 и 25.2 была подробно описана процедура определения параметров потока в передней критической точке. При необходимости расчета пограничных слоев по обводу тела распределение давления вдоль поверхности тела при больших сверхзвуковых скоростях может быть найдено на основе ньютоновского приближения [174]. Для определения остальных необходимых величин, например температуры, состава газа, можно использовать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую течение вдоль струйки тока невязкого потока (поток предполагается потенциальным)

$$U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dc_{ie}}{dx} = \frac{w_i}{\rho_e U_e},$$

$$\frac{dH_e}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_i c_{ie} h_{ie} + U_e \frac{dU_e}{dx}, \quad c_{ie}^* = \text{const} = c_{ie}^* \infty. \quad (4.136)$$

Для решения системы (4.136) необходимо задать условия в начальном сечении трубки тока. При расчете обтекания затупленных тел в качестве таких условий можно использовать параметры потока в критической точке (способ их определения был дан в пп. 25.1, 25.2).

В частном случае замороженного течения в пограничном слое ($w_i \equiv 0$) условие $w_i \equiv 0$ должно выполняться и вдоль внешней границы пограничного слоя, поскольку решение в слое должно асимптотически переходить в решение для невязкого газа. Следовательно, в этом случае должно выполняться условие

$$c_{ie}(x) = \text{const} = (c_{ie})_s, \quad (4.137)$$

хотя температура и давление на внешней границе могут изменяться (индекс s означает параметры в критической точке).

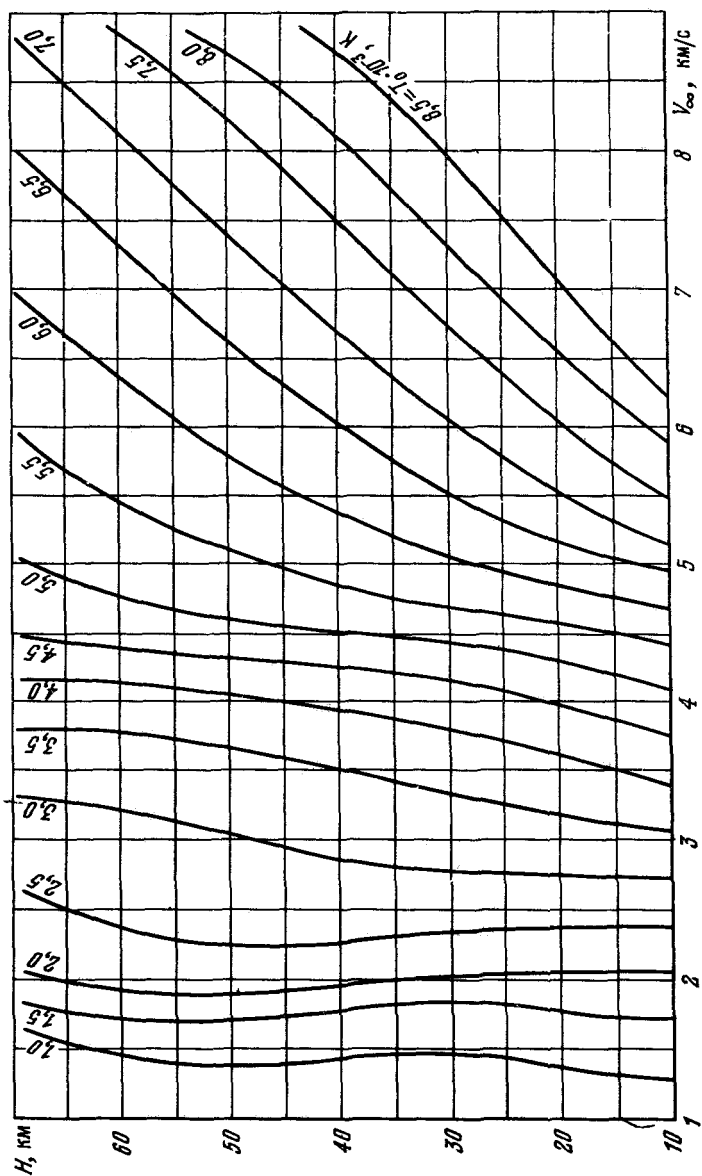


Рис. 69.

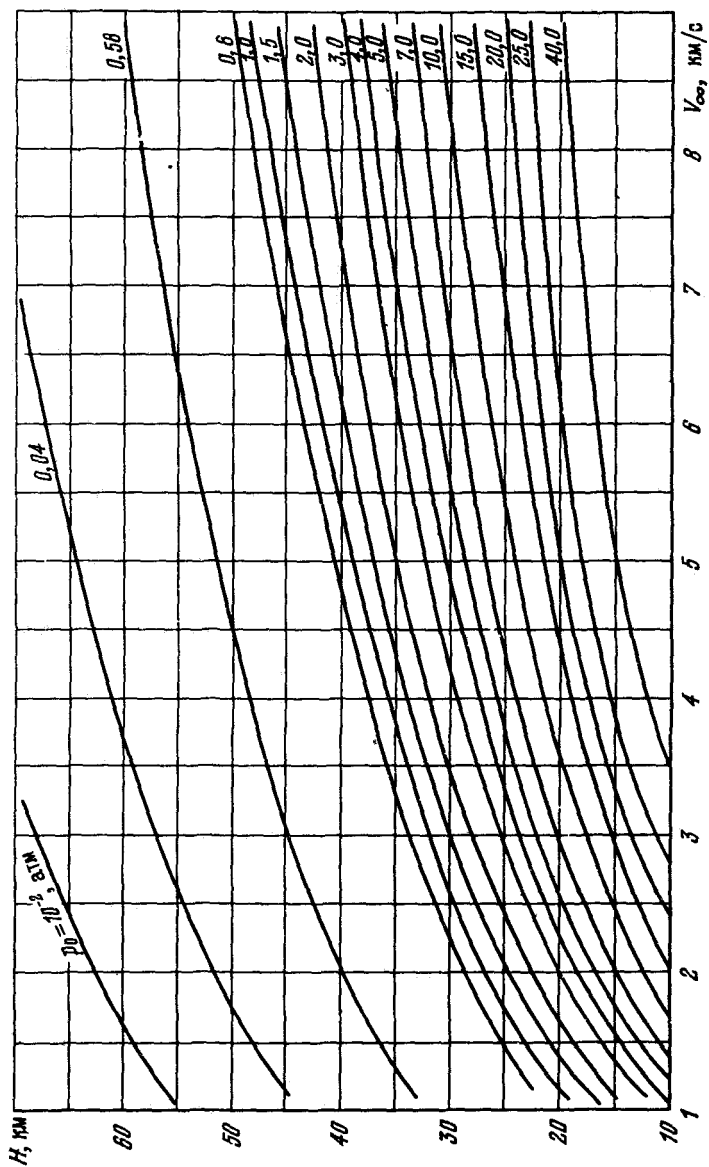


Рис. 70.

В случае равновесного течения в пограничном слое второе из уравнений (4.136) следует заменить на условие

$$w_i = 0, \quad (4.138)$$

приводящее к системе уравнений, аналогичной той, которая получена для расчета концентраций в передней критической точке.

Граничные условия для концентраций компонент на поверхности с произвольной каталитической способностью были подробно рассмотрены в пп. 22.5, 22.7.

§ 26. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

26.1. Исходные предпосылки. Прежде всего ограничимся рассмотрением течений с нулевыми (плоская пластина, клин) и небольшими продольными перепадами давления. На этом основании в качестве схемы пограничного слоя примем классическую двухслойную прандтлевскую схему, согласно которой весь слой делится на две дискретные области: вязкий подслой и турбулентное ядро.

В рамках этой схемы игнорируется существование буферной области между подслоем и турбулентным ядром. Основанием для подобного допущения применительно к рассматриваемому классу течений с большими скоростями служат экспериментально установленные особенности профилей скорости: согласно опытам [35] при больших числах Маха имеет место существенное уменьшение протяженности буферной области. В иных случаях буферная область почти полностью вырождается и переход от подслоя к ядру носит довольно резкий характер (см., например, опыты Хилла на рис. 6). Добавим к сказанному, что "игнорирование" тонких особенностей поведения профилей скорости, температуры и концентраций в буферной области не приводит к существенным погрешностям в расчете интегральных характеристик (трения, тепловых и диффузионных потоков), как свидетельствует накопленный опыт расчета таких характеристик, при условии, что числа Прандтля и Шмидта не слишком отличаются от единицы. Поэтому к указанному выше ограничению (небольшие продольные перепады давления) добавим допущение о близости чисел Прандтля и Шмидта к единице. Это допущение может оказаться существенным при рассмотрении течений ионизованных газов, в которых при достаточно высоких степенях ионизации числа Прандтля могут оказаться существенно меньшими единицы ($Pr < 10^{-1} \div 10^{-2}$). В области температур и давлений, соответствующих режимам течения с диссоциацией, допущение о близости чисел Прандтля и Шмидта к единице представляется вполне приемлемым.

Другой важной особенностью профилей скорости при больших числах Маха является увеличение относительной толщины вязкого подслоя с ростом чисел Маха (см. рис. 7). Эта особенность делает необходимым достаточно аккуратное описание процессов переноса в вязком подслое. Иными словами, расчет коэффициентов вязкости,

теплопроводности и диффузии в вязком подслое должен проводиться с точностью, принятой при описании ламинарных пограничных слоев в многокомпонентных реагирующих смесях газов.

Еще одно допущение, заложенное в прандтлевской двухслойной схеме, нуждается в рассмотрении. Согласно этой схеме две области турбулентного пограничного слоя, а именно, область логарифмического профиля скоростей и область закона следа объединяются в единую область, именуемую турбулентным ядром. При этом логарифмический профиль скорости распространяется и на область закона следа. Подобный прием, как показывает, по существу, весь обширный опыт применения двухслойной прандтлевской схемы, правомерен лишь для течений с небольшими продольными перепадами давления, т.е. для течений, далеких от отрыва. Об этом, в частности, свидетельствует положительный опыт применения двухслойной прандтлевской схемы к расчету характеристик турбулентных пограничных слоев в однородном по составу сверхзвуковом потоке (гл.3). Естественно, течения с большими продольными перепадами давления должны рассматриваться в рамках более строгих схем, с учетом основных тенденций в характере изменения масштабов областей. Эти тенденции не изучены в полной мере, как это отмечалось в гл. 2, даже в случае течения несжимаемой жидкости. Ясно, что при существующем положении любая постановка задачи о турбулентном пограничном слое в потоке многокомпонентной реагирующей смеси газов при больших продольных перепадах давления была бы в настоящее время недостаточно обоснована.

26.2. Трение, профиль скоростей, интегральные толщины на плоской пластине. Трение при небольших продольных перепадах давления. В рамках принятой схемы пограничного слоя нетрудно обобщить интегральный полуэмпирический метод расчета турбулентного пограничного слоя в однородном газовом потоке, подробно рассмотренный в § 14, на рассматриваемый случай течения многокомпонентной реагирующей газовой смеси. Действительно, выражение для профиля скоростей в турбулентном ядре (3.71) получено из формулы Кармана без каких-либо допущений о характере изменения плотности в турбулентном ядре, поэтому оно может быть использовано для расчета профиля скоростей на пластине при наличии диссоциации. Это выражение в предположении (3.78), согласно которому трение τ принимается постоянным поперек пограничного слоя и равным τ_w , приобретает вид

$$\eta = \eta_x + \frac{\tau}{\rho} \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} \exp \left[\eta \tau \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} d\bar{u} \right] d\bar{u}. \quad (4.139)$$

Для определения чисел Рейнольдса, построенных по толщине потери импульса и толщине вытеснения, а также формпараметра

$H^* = \delta^*/\delta^{**}$ можно воспользоваться выражениями (3.87), (3.89) и (3.90), полученными в § 14 для произвольного распределения

плотности в пограничном слое. Для удобства приведем здесь эти выражения:

$$Re^{**} = \frac{e^{-\pi u}}{f \pi^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp \left[\pi \zeta \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} d\bar{u} \right] \left[1 - \frac{2 + \frac{1}{2} \frac{\rho'(1)}{\rho_e}}{\pi \zeta (\rho_e / \rho_w)^{1/2}} \right], \quad (4.140)$$

$$Re^* = \frac{e^{-\pi u}}{f \pi^2} \frac{\mu_w}{\mu_e} \exp \left[\pi \zeta \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} d\bar{u} \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{\rho'(1)}{\rho_e} - \frac{1}{\pi \zeta} \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho'(1)}{\rho_e} + \frac{\rho''(1)}{\rho_e} - \frac{3}{2} \frac{\rho'(1)^2}{\rho_e^2} \right) \right], \quad (4.141)$$

$$H^* = \left[1 + \frac{\rho'(1)}{\rho_e} - \frac{1}{\pi \zeta} \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho'(1)}{\rho_e} + \frac{\rho''(1)}{\rho_e} - \frac{3}{2} \frac{\rho'(1)^2}{\rho_e^2} \right) \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{2 + \frac{1}{2} \frac{\rho'(1)}{\rho_e}}{\pi \zeta (\rho_e / \rho_w)^{1/2}} \right]^{-1}. \quad (4.142)$$

Здесь

$$\rho'(1) = \left(\frac{d\rho}{d\bar{u}} \right)_{\bar{u}=1}, \quad \rho''(1) = \left(\frac{d^2\rho}{d\bar{u}^2} \right)_{\bar{u}=1}$$

Естественно, и в этом нетрудно убедиться, что для расчета трения можно воспользоваться формулами, полученными в § 14, следует лишь отказаться в этих формулах от конкретизации зависимости плотности газа в пограничном слое от скорости. В этом случае будем иметь для расчета местного коэффициента трения c_f следующую систему равенств:

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \left(\frac{FK}{2N} \right)^2, \quad F = 0,242 c_{f0}^{-1/2}, \quad K = \int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^{1/2} d\bar{u}, \quad (4.143) \\ N + \lg N = \lg \frac{FK}{2} + \frac{1}{2} (F + G), \quad G = \lg \left(\frac{\mu_e}{\mu_w} \right).$$

Здесь c_{f0} — местный коэффициент трения на пластине, обтекаемой несжимаемой жидкостью без теплообмена, ρ — плотность газа, μ — коэффициент динамической вязкости, $\bar{u} = u/U_e$, u — продольная составляющая скорости в пограничном слое; индексами e и w здесь и далее обозначены величины на внешней границе пограничного слоя и на стенке соответственно.

Как видно из системы (4.143), влияние физико-химических процессов в пограничном слое на сопротивление проявляется через зависимость плотности от скорости и вязкость.

Напомним, что местный коэффициент трения c_{f0} на пластине, обтекаемой несжимаемой жидкостью, может быть вычислен либо по формуле Кармана (3.101), либо по формулам (3.121).

Коэффициент динамической вязкости может быть определен по одному из соотношений, приведенных в п. 4.1 § 4, в частности по формуле Уилки (1.71).

Таким образом, задача расчета трения, профиля скоростей и при необходимости интегральных толщин сводится главным образом к установлению зависимости плотности от скорости.

Из уравнения состояния (1.120) и условия постоянства давления поперек пограничного слоя следует связь плотности с температурой и составом смеси в данной точке

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \left(\frac{T}{T_e} \right)^{-1} \frac{M}{M_e}, \quad M = \left(\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{M_i} \right)^{-1}. \quad (4.144)$$

Из равенств (4.144) следует, что для установления зависимости плотности от скорости необходимо установить зависимость температуры и концентраций компонент от скорости. Рассмотрению этих вопросов посвящен следующий пункт настоящего параграфа.

Для расчета трения при небольших продольных перепадах давления можно использовать метод последовательных приближений, рассмотренный в п. 17.3 § 17. Подобное обобщение оказывается возможным, поскольку построение метода не было связано с конкретизацией зависимости плотности от скорости. Алгоритм расчета в этом случае выражается системой равенств (3.201), (3.202), причем функция K , входящая в равенство (3.201), определяется третьим из равенств (4.143), а формпараметр N^* , необходимый для определения функции Ω (второе из равенств (3.145)), выражается равенством (4.142). Подчеркнем, что метод последовательных приближений основывается на использовании закона сопротивления для плоской пластины. Учет влияния продольного перепада давления в этом методе осуществляется лишь через интегральное соотношение импульсов; все основные характеристики слоя (профили скоростей, температур, концентраций, а также интегральные толщины) принимаются такими же, как на плоской пластине. Эти обстоятельства необходимо учитывать при оценке реальных возможностей метода.

26.3. Связь профилей полной энтальпии, концентраций и плотности с профилями скорости. Тепловой поток. Для установления необходимых зависимостей полной энтальпии и концентраций от скорости целесообразно использовать уравнения пограничного слоя, записанные в переменных Крокко. Переход от физических переменных к переменным Крокко был подробно рассмотрен в п. 8.6 § 8. В рамках принятой двухслойной прандтлевской схемы запишем урав-

нения пограничного слоя в переменных Крокко раздельно для вязкого подслоя ($0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi$) и турбулентного ядра ($\bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1$). Здесь

$\bar{u}_\pi = u_\pi / U_e = \alpha / \xi$ - безразмерная скорость на границе подслоя и ядра, $\alpha = 11,5$ - постоянная турбулентности, ξ - параметр трения, определяемый соотношением (3.57). Упростим рассмотрение задачи, приняв допущение о равенстве единице турбулентных аналогов чисел Прандтля и Шмидта в турбулентном ядре

$$Pr_T = Sc_T = 1. \quad (4.145)$$

В вязком подслое будем пренебрегать вкладом баро- и термодиффузии в перенос вещества и диффузионного термоэффекта в перенос энергии.

При принятых допущениях уравнение энергии в переменных Крокко в вязком подслое ($0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi$) и в турбулентном ядре ($\bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1$) соответственно имеет вид

$$\mu \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial u} \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi, \quad (4.146)$$

$$q = \frac{\tau}{Pr} \left[\frac{\partial H}{\partial u} + \sum_{i=1}^N (Le_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial u} + (Pr - 1) u \right], \quad (4.147)$$

$$\mu \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\tau^2}{\mu_T} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \quad \text{при} \quad \bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1. \quad (4.148)$$

Здесь x - координата, отсчитываемая вдоль пластины, τ - напряжение трения, μ_T - турбулентный аналог динамической вязкости,

q - так называемый обобщенный тепловой поток, $Pr = \mu c_p / \lambda$ - число Прандтля, c_p - удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении, λ - коэффициент теплопроводной смеси, $Le_i = \rho \mathcal{D}_i c_p / \lambda$ - число Льюиса, построенное по эффективному коэффициенту диффузии $\mathcal{D}_i$, c_i - массовая концентрация i -й компоненты, N - число компонент смеси, H - полная энтальпия смеси, выражаемая равенством

$$H = h + \frac{u^2}{2}, \quad h = \sum_{i=1}^N c_i h_i, \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0, \quad (4.149)$$

где c_{pi} - удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном давлении, T - температура, h_i^0 - энтальпия образования i -й компоненты при стандартных условиях. Индексом "л" обозначены параметры на границе вязкого подслоя и турбулентного ядра.

Выражения для эффективных коэффициентов диффузии могут быть получены путем формального представления диффузионного потока i -й компоненты в форме закона Фика

$$j_i = \rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial y}, \quad (4.150)$$

или иначе

$$D_i = j_i / \left(\rho \frac{\partial c_i}{\partial y} \right). \quad (4.151)$$

Диффузионные потоки отдельных компонент могут быть найдены из соотношений Стефана - Максвелла (1.93). Впервые понятие эффективного коэффициента диффузии применительно к ламинарным пограничным слоям было введено в практику расчетов в работах Г.А. Тирского [223]. Введение эффективных коэффициентов диффузии совместно с соображениями подобия позволило в ряде случаев упростить расчет диффузионных потоков в многокомпонентных смесях. Формальное введение эффективных коэффициентов диффузии, естественно, не приводит к каким-либо упрощениям и полностью эквивалентно использованию соотношений Стефана - Максвелла.

Граничные условия для уравнений (4.146) и (4.148) имеют вид

$$N = h_w \text{ при } u = 0, \quad N = N_e \text{ при } u = U_e. \quad (4.152)$$

Кроме условий (4.152), должны быть выполнены условия непрерывности полной энтальпии и обобщенного теплового потока на границе вязкого подслоя и турбулентного ядра.

Уравнения диффузии и граничные условия для отдельных компонент смеси при принятых допущениях в вязком подслое ($0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi$) и в турбулентном ядре ($\bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1$) соответственно имеют вид

$$\rho u \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial c_i}{\partial u} = \frac{\mu}{\tau} w_i + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\tau}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial u} \right) \quad (4.153)$$

при $0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi$,

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} = w_i + \frac{\tau^2}{\mu_\tau} \frac{\partial^2 c_i}{\partial u^2} \quad \text{при} \quad \bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1, \quad (4.154)$$

$$c_i = c_{i,w} \text{ при } u = 0, \quad c_i = c_{i,e} \text{ при } u = U_e. \quad (4.155)$$

Здесь w_i - массовая скорость образования i -й компоненты в единице объема, $Sc_i = \mu / (\rho D_i)$ - число Шмидта. Значения концентраций компонент на стенке $c_{i,w}$ могут быть заранее определены лишь в некоторых частных случаях. В общем случае значения $c_{i,w}$ должны определяться в процессе решения задачи с использованием дополнительных соотношений, описывающих кинетику процессов на поверхности (см. п. 22.5).

Кроме условий (4.155), на границе вязкого подслоя и турбулентного ядра должны удовлетворяться условия непрерывности концентраций компонент и диффузионных потоков.

Из N уравнений (4.153) и (4.154) лишь $N-1$ являются независимыми, так как имеет место условие $\sum_i c_i = 1$. Уравнения (4.153) и (4.154) позволяют в принципе рассчитывать не только неравновесные течения, но и течения, практически не отличающиеся от равновесных. Однако, как показывает опыт расчетов течений, близких к равновесным (это подробно обсуждалось выше (§ 24)), получение "равновесных" решений уравнений (4.153) и (4.154) связано с неоправданно большими затратами машинного времени и требует известного опыта расчетов таких течений. В связи с этим для расчета равновесных течений целесообразно пользоваться редуцированной формой системы уравнений (4.153) и (4.154). Для получения этой системы уравнений умножим (4.153) и (4.154) на концентрацию k -го элемента в i -й компоненте $c_{ki} = M_k N_k / M_i$ (M_k - атомный вес k -го элемента, N_k - число атомов k -го элемента в i -й компоненте) и просуммируем полученные таким образом уравнения по i . В результате будем иметь N_3 уравнений диффузии для элементов в вязком подслое и в турбулентном ядре соответственно

$$\rho u \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial c_k^*}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial c_k^*}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} j_k^*, \quad j_k^* = \tau \sum_{i=1}^N \frac{c_{ki}}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial u}, \quad (4.156)$$

$$\rho u \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial c_k^*}{\partial x} = \frac{\partial^2 c_k^*}{\partial u^2}, \quad (4.157)$$

$$c_k^* = \sum_{i=1}^N c_{ki} c_i. \quad (4.158)$$

Здесь c_k^* - концентрация k -го элемента, а j_k^* - диффузионный поток k -го элемента.

Систему уравнений переноса для элементов N_3 ($N_3 < N$) следует дополнить N_4 выражениями для констант равновесия независимых химических реакций.

Граничные условия для уравнений (4.156) и (4.157) на непроницаемой поверхности имеют вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{c_{ki}}{Sc_i} \frac{\partial c_i}{\partial u} = 0 \quad \text{при} \quad u = 0, \quad (4.159)$$

$$c_k^* = c_{ka}^* \quad \text{при} \quad u = U_a.$$

Первое из условий (4.159) означает условие равенства нулю диффузионного потока k -го элемента на поверхности тела.

Условия (4.159) должны быть дополнены условиями непрерывности концентраций элементов и диффузионных потоков элементов на границе вязкого подслоя и турбулентного ядра.

При протекании на непроницаемой поверхности каталитических реакций в стационарных условиях диффузионный поток i -й компоненты должен равняться скорости образования i -й компоненты:

$$j_{i,w} = k_{wi} [A_i]^{n_i} - k_{wj} [A_j]^{n_j}, \quad (4.160)$$

где k_{wi} , k_{wj} — константы скоростей прямой и обратной химических реакций, n_i , n_j — порядки прямой и обратной реакции, $[A_i]$, $[A_j]$ — концентрации компонент.

Условие (4.160) совместно с выражением для диффузионного потока позволяет определить состав смеси ($c_{i,w}$) на поверхности тела.

Решение системы уравнений (4.146)–(4.148) и (4.153)–(4.154) при рассмотренных граничных условиях приводит к установлению необходимых зависимостей полной энтальпии и концентраций от скорости в вязком подслое и турбулентном ядре. Это решение может быть получено численным методом. Обзор работ по численным методам интегрирования уравнений пограничного слоя в переменных Крокко был дан в § 13.

Для выявления основных тенденций в характере влияния химических процессов на характеристики турбулентных пограничных слоев, в частности влияния этих процессов на интегральные характеристики (трение, теплообмен), решение рассмотренной выше системы уравнений может быть получено в приближении локального подобия.

26.4. Решение тепловой и диффузионной задач в приближении локального подобия. В теории турбулентного пограничного слоя на плоской пластине и телах, обтекаемых с небольшими продольными изменениями параметров внешнего потока, многие результаты, в частности при исследовании течений в диссоциирующем газе, были получены в приближении локального подобия [35]. Согласно этому приближению в любой точке с координатой x зависимости искомых переменных от x предполагаются такими, что их производными по x можно пренебречь, а те члены уравнений, которые в соответствии с условиями в невозмущенном потоке или на стенке зависят от x , принимаются равными их локальным значениям. В этом случае исходные уравнения в переменных Крокко становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями со скоростью u в качестве независимой переменной.

Из решения этих уравнений могут быть найдены характеристики пограничного слоя в заданном сечении; развитием течения вдоль оси x фактически пренебрегается. Справедливость гипотезы локального подобия в большой степени зависит от того, насколько

медленно меняются параметры внешнего потока и на стенке с изменением x . В случае течения вблизи плоской пластины с постоянными значениями параметров на стенке и во внешнем потоке гипотеза локального подобия, по-видимому, не должна приводить к заметным погрешностям в расчете. Во всяком случае с помощью метода локального подобия можно, вероятно, с достаточной достоверностью оценить влияние кинетики химических реакций на интегральные характеристики. Расчет "динамики" перехода от замороженного течения к равновесному следует проводить, основываясь на более точных уравнениях.

При рассмотрении течений на плоской пластине с большой степенью точности можно принять, что в вязком подслое напряжение трения τ постоянно поперек подслоя и равно его значению на стенке, т.е. $\tau = \text{const} = \tau_w$. С учетом этого обстоятельства в рамках гипотезы о локальном подобии ($\partial H / \partial x = \partial c_i / \partial x = 0$) исходные уравнения энергии (4.146) – (4.148), диффузии (4.153), (4.154) и диффузии элементов (4.156), (4.157) упрощаются и принимают соответственно следующий вид:

$$\frac{d\eta}{du} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq u \leq u_\pi, \quad \frac{d^2 H}{du^2} = 0 \quad \text{при} \quad u_\pi \leq u \leq U_e; \quad (4.161)$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{Sc_i} \frac{dc_i}{du} \right) = - \frac{\mu}{\tau^2} \omega_i \quad \text{при} \quad 0 \leq u \leq u_\pi, \quad (4.162)$$

$$\frac{d^2 c_i}{du^2} = - \frac{\mu_\tau}{\tau^2} \omega_i \quad \text{при} \quad u_\pi \leq u \leq U_e;$$

$$\frac{d}{du} f_k^* = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq u \leq u_\pi, \quad \frac{d^2 c_k^*}{du^2} = 0 \quad \text{при} \quad u_\pi \leq u \leq U_e. \quad (4.163)$$

Интегрирование уравнений (4.161) – (4.163) при указанных в п. 26.3 граничных условиях не составляет труда. В связи с этим ограничимся здесь тем, что приведем окончательные результаты интегрирования. При этом в вязком подслое будем считать число Прандтля и эффективные числа Льюиса и Шмидта постоянными, равными их значениям на стенке. В обоснование этого допущения можно заметить, что, как показывают расчеты, проведенные Ю.Н. Койчевым и Ю.С. Чумаковым [208] для тройных смесей типа смеси O , O_2 , N_2 , эти числа действительно мало изменяются поперек подслоя в широком диапазоне изменения условий на стенке и во внешнем потоке. Обычно отклонение этих чисел от их значений на стенке не превышает $3 \div 5\%$.

В результате интегрирования уравнений (4.161), получаются следующие зависимости между профилями полной энтальпии, скорости и концентраций в вязком подслое и в турбулентном ядре

соответственно

$$H = h_w + \frac{Pr}{\tau_w} q_w \bar{u} U_e - \sum_{i=1}^N (Le_i - 1) \int_0^{\bar{u}} h_i \frac{\partial c_i}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{1}{2} (1 - Pr) U_e^2 \bar{u}^2$$

при $0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi$, (4.164)

$$H = H_e - \frac{q_w}{\tau_w} U_e (1 - \bar{u}) \quad \text{при} \quad \bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1, \quad (4.165)$$

$$q_w = \tau_w \left\{ U_e [1 - (1 - Pr) \bar{u}_\pi] \right\}^{-1} \left\{ h_e + [1 - (Pr - 1) \bar{u}_\pi^2] \frac{U_e^2}{2} - \right. \\ \left. - h_w + \sum_{i=1}^N (Le_i - 1) \int_0^{\bar{u}_\pi} h_i \frac{dc_i}{d\bar{u}} d\bar{u} \right\},$$

$$\bar{u}_\pi = \frac{\alpha}{\xi}, \quad \xi = \frac{U_e}{v_*} = \frac{U_e}{(\tau_w / \rho_w)^{1/2}}. \quad (4.166)$$

Здесь τ_w — напряжение трения на стенке, q_w — тепловой поток на поверхности пластины, α — эмпирическая постоянная турбулентности ($\alpha = 11,5$).

Из определения полной энтальпии (4.149) при условии, что удельные теплоемкости отдельных компонент не зависят от температуры, следует выражение для температуры

$$T = \left(H - \sum_{i=1}^N c_i h_i^0 - \frac{u^2}{2} \right) \left(\sum_{i=1}^N c_i c_{pi} \right)^{-1}. \quad (4.167)$$

Выражения для полной энтальпии в вязком подслое и турбулентном ядре, теплового потока и температуры содержат неизвестные пока концентрации отдельных компонент. Для установления связи концентраций со скоростью в вязком подслое и турбулентном ядре необходимо проинтегрировать уравнения диффузии (4.162).

В результате интегрирования в вязком подслое и в турбулентном ядре соответственно найдем

$$c_i = c_{i,w} + Sc_i \delta_{i,w} \bar{u} / \tau_w - Sc_i I_{\pi i}(\bar{u}) \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi, \quad (4.168)$$

$$c_i = c_{i,e} - \left[\delta_{i,w} \frac{U_e}{\tau_w} - I_{\pi i}(\bar{u}) \right] (1 - \bar{u}) + I_{\pi i}(1) - I_{\pi i}(\bar{u})$$

при $\bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1$, (4.169)

$$\delta_{i,w} = \tau_w \left\{ U_e [1 - (1 - Sc_i) \bar{u}_\pi] \right\}^{-1} \left\{ c_{i,e} - c_{i,w} + Sc_i I_{\pi i}(\bar{u}_\pi) - \right. \\ \left. - I_{\pi i}(\bar{u}_\pi) (1 - \bar{u}_\pi) + I_{\pi i}(1) \right\}. \quad (4.170)$$

В соотношениях (4.168), (4.169) введены обозначения

$$\bar{I}_{\pi i}(\bar{u}) = a \int_0^{\bar{u}} \int_0^{\bar{u}} w_i \dot{\eta}_{\pi} d\bar{u} d\bar{u}, \quad \dot{I}_{\pi i}(\bar{u}) = a \int_0^{\bar{u}} w_i \dot{\eta}_{\pi} d\bar{u}, \quad (4.171)$$

$$\bar{I}_{\tau i}(\bar{u}) = a \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} w_i \dot{\eta}_{\tau} d\bar{u} d\bar{u}, \quad a = \tau^4 \mu_w / (\rho_w^2 U_e^2).$$

Здесь $\dot{\eta}_{iw}$ — диффузионный поток i -й компоненты на стенке, а

$\dot{\eta}_{\pi} = 1$ в вязком подслое и

$$\dot{\eta}_{\tau} = \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)_{\tau} = \frac{1}{f} \exp \left[\kappa \tau \int_{\bar{u}_x}^{\bar{u}} (\rho/\rho_w)^{1/2} d\bar{u} \right] \quad (4.172)$$

в турбулентном ядре ($\kappa = 0,4$, $f = 1/\kappa \alpha$).

Безразмерные интегральные комплексы $\bar{I}_{\pi i}$, $\dot{I}_{\pi i}$, $\bar{I}_{\tau i}$, содержащие массовую скорость образования i -й компоненты w_i , характеризуют суммарную мощность источников образования i -й компоненты, заключенных в некотором объеме, протяженность которого в направлении оси $\bar{u}$ определяется пределами интегрирования, а площадь основания можно считать единичной.

Отметим, что равенство (4.172) непосредственно следует из выражения для профиля скоростей (4.139). Равенство $\dot{\eta}_{\pi} = 1$ вытекает из линейности профиля в вязком подслое: $\varphi = \eta$ ($\bar{\varphi} = \bar{u}/v_*$).

Интегрирование уравнений диффузии элементов (4.163) при сформулированных выше граничных условиях и принятых допущениях ($\dot{S}c_i = \text{const} = \dot{S}c_{iw}$) приводит в вязком подслое и в турбулентном ядре к следующим результатам:

$$c_k^* = c_{ke}^* - \sum_{i=1}^N c_{ki} \left(\frac{1}{\dot{S}c_i} - 1 \right) (c_i - c_{iw}) \quad \text{при } 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_x, \quad (4.173)$$

$$c_k^* = \text{const} = c_{ke}^* \quad \text{при } \bar{u}_x \leq \bar{u} \leq 1. \quad (4.174)$$

Решение полученной после интегрирования системы уравнений может быть проведено методом последовательных приближений. Рассмотрим некоторые частные случаи решения этой системы.

Неравновесное течение при $Pr = Le_i = 1$. Распределения полной энтальпии в вязком подслое и турбулентном ядре, как это следует из соотношений (4.164)–(4.165), имеют вид

$$H = h_w + \frac{q_w}{\tau_w} U_e \bar{u} \quad \text{при } 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_x, \quad (4.175)$$

$$H = H_e - \frac{q_w}{\tau_w} U_e (1 - \bar{u}) \quad \text{при } \bar{u}_x \leq \bar{u} \leq 1.$$

Приравнивая значение полной энтальпии из равенств (4.175) на границе вязкого подслоя при $\bar{u} = \bar{u}_\pi$, найдем выражение для теплового потока

$$q_w = \tau_w \frac{H_e - h_w}{U_e}. \quad (4.176)$$

Подставив выражение для теплового потока (4.176) в равенства (4.175), получим общее для вязкого подслоя и турбулентного ядра соотношение

$$\frac{H - h_w}{H_e - h_w} = \bar{u}, \quad (4.177)$$

являющееся, как легко видеть, интегралом Крокко.

Вводя в рассмотрение безразмерные коэффициенты трения и теплопередачи (число Стантона)

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_e U_e^2}, \quad c_h = \frac{q_w}{\rho_e U_e (H_e - h_w)}, \quad (4.178)$$

приведем соотношение (4.176) к виду

$$\frac{2c_h}{c_f} = 1. \quad (4.179)$$

Равенство (4.179) является выражением классической аналогии Рейнольдса между трением и теплопередачей.

Полагая равным единице эффективное число Шмидта в выражениях (4.168), (4.169), найдем

$$c_i = c_{iw} + j_{iw} u / \tau_w - I_{\pi i}(\bar{u}) \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_\pi, \quad (4.180)$$

$$c_i = c_{ie} - [j_{iw} U_e / \tau_w - \dot{I}_{\pi i}(\bar{u})](1 - \bar{u}) + I_{\tau i}(1) - I_{\tau i}(\bar{u})$$

$$\text{при} \quad \bar{u}_\pi \leq \bar{u} \leq 1.$$

Приравнивая обе части равенств (4.180) при $\bar{u} = \bar{u}_\pi$, получим выражение для диффузионного потока i -й компоненты на стенке, которое также можно получить непосредственно из равенства (4.170) при $Sc_i = 1$:

$$j_{iw} = \frac{\tau_w}{U_e} [c_{ie} - c_{iw} + I_{\pi i}(\bar{u}_\pi) - \dot{I}_{\pi i}(\bar{u}_\pi)(1 - \bar{u}_\pi) + I_{\tau i}(1)]. \quad (4.181)$$

Замороженное течение при $Pr \approx Sc_i = 1$. В рассматриваемом

случае весь анализ для полной энтальпии, проведенный для неравно-
весных течений, сохраняется без изменений. Существенное упроще-
ние получается для профилей концентраций. Полагая в равенствах
(4.180) и (4.181) интегральные комплексы $I_{\pi i}$, $\dot{I}_{\pi i}$, $I_{\tau i}$ рав-

ными нулю (химические реакции заморожены), найдем

$$\begin{aligned} c_i &= c_{iw} + j_{iw} u / \tau_w \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_x, \\ c_i &= c_{ie} - (j_{iw} U_e / \tau_w) (1 - \bar{u}) \quad \text{при} \quad \bar{u}_x \leq \bar{u} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.182)$$

Аналогично из (4.181) получим выражение для диффузионного потока i -й компоненты на стенке

$$j_{iw} = \frac{\tau_w}{U_e} (c_{ie} - c_{iw}). \quad (4.183)$$

Исключая диффузионный поток из (4.182) с помощью (4.183), получим единое для вязкого подслоя и турбулентного ядра выражение

$$\frac{c_i - c_{iw}}{c_{ie} - c_{iw}} = \bar{u}, \quad (4.184)$$

известное в литературе под названием интеграла Пробстينا.

Сравнивая равенства (4.176) и (4.183), нетрудно прийти к выводу о существовании аналогии между процессами переноса тепла, вещества и количества движения в рассматриваемом случае замороженного течения при $Pr = Sc_i = 1$:

$$\frac{q_w}{h_e - h_w} = \frac{j_{iw}}{c_{ie} - c_{iw}} = \frac{\tau_w}{U_e}. \quad (4.185)$$

Аналогия (4.185) может быть полезна для приближенных оценок теплового потока и диффузионных потоков при числах Прандтля и Шмидта, не слишком отличных от единицы.

В заключение отметим, что при $Sc_i = 1$ концентрация элементов для всех режимов течения (неравновесного, равновесного, замороженного), как это следует из равенств (4.173) и (4.174), постоянна по сечению слоя и равна значению на внешней границе слоя

$$c_k^* = \text{const} = c_{ke}^* \quad \text{при} \quad 0 \leq \bar{u} \leq 1. \quad (4.186)$$

В этом случае эффект разделения элементов не проявляется.

26.5. Последовательность расчета. Изложенный интегральный метод расчета характеристик турбулентного пограничного слоя в диссоциирующем газе является по существу методом последовательных приближений.

Последовательность расчета неравновесного течения может быть примерно следующей. Прежде всего определяется распределение параметров в сечении пограничного слоя в нулевом приближении. В качестве нулевого приближения можно принять распределения $c_i(\bar{u})$, $T(\bar{u})$, полученные из решения задачи о замороженном течении при

$Pr = Sc_i = 1$. В последнем случае зависимости $H(\bar{u})$ и $c_i(\bar{u})$ выражаются интегралами Крокко (4.177) и Пробстина (4.184) соответственно. По известным $c_i(\bar{u})$ и $H(\bar{u})$ из соотношений (4.149) определяется распределение температуры $T(\bar{u})$. По известным $T(\bar{u})$ и $c_i(\bar{u})$ по соотношениям (4.144) находится распределение плотности $\rho(\bar{u})$. Зависимость плотности $\rho(\bar{u})$ далее применяется для расчета трения $c_f(\tau_w)$ на стенке по соотношениям (4.143).

Распределения параметров в сечении пограничного слоя в нулевом приближении далее используются для расчета состава газа в первом приближении по соотношениям (4.168)–(4.170). При этом целесообразна организация "внутренних" итераций для равенств (4.168) и (4.169) с тем, чтобы привести в соответствие источниковые члены, входящие в интегральные комплексы $I_{\pi i}$, $\dot{I}_{\pi i}$, $I_{\tau i}$, с левой частью этих соотношений. Лишь после завершения итераций по $c_i(\bar{u})$ при заданном в нулевом приближении распределении $T(\bar{u})$ следует переходить к расчету $T(\bar{u})$ в первом приближении по соотношениям (4.164)–(4.166), (4.169). По известным теперь $c_i(\bar{u})$ и $T(\bar{u})$ в первом приближении находятся параметры $\rho(\bar{u})$, c_f , j_{iw} , q_w и т.д.

Данные о скоростях химических реакций в воздухе приведены в § 22. Способы расчета коэффициентов переноса даны в § 4. Ясно, что в процессе итераций должны уточняться коэффициенты переноса смеси (μ , λ , D_i), а также числа Прандтля и Шмидта (Льюиса).

При проведении расчетов неравновесных течений вблизи стенок с произвольной каталитической способностью в процедуру расчета концентраций должно быть включено условие (4.160), связывающее диффузионные потоки компонент со скоростями гетерогенных реакций (некоторые сведения по каталитическим реакциям компонент воздуха приведены в § 22). Включение этого условия необходимо, поскольку заранее (до решения задачи) неизвестен состав газа на поверхности тела. Лишь в случаях течения вблизи абсолютно каталитической и абсолютно некаталитической стенок состав газа на стенке может быть определен заранее (см. п. 22.7).

Расчет замороженных течений может быть проведен по тому же алгоритму, что и расчет неравновесных течений. При этом следует положить равными нулю массовые скорости образования компонент в объеме газа ($I_{\tau i} = I_{\pi i} = \dot{I}_{\pi i} = 0$).

Расчет равновесных течений также в принципе может быть проведен по алгоритму расчета неравновесных течений, однако при этом могут возникнуть трудности вычислительного характера, подробно рассмотренные в § 24. В последнем случае можно использовать "компромиссный" подход, заключающийся в использовании для

расчета концентраций уравнений для диффузии элементов (4.173) - (4.174) и выражений для констант равновесия независимых химических реакций. В остальном процедура расчета равновесных течений совпадает с рассмотренной выше.

§ 27. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЯ ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ВОЗДУХА

27.1. О кинетической модели диссоциирующего воздуха. В п.22.6 на основании работы Рея [216] была приведена система наиболее существенных химических реакций, протекающих в воздухе в области диссоциации (при $p = 1$ атм, $2000 \leq T \leq 8000$ К). Эта система включает шесть реакций (4.41), которые приводят к образованию пятикомпонентной смеси: O , N , NO , O_2 , N_2 , состоящей из двух элементов O и N .

Обычно принято считать, и это в общем справедливо, что основную роль играют первые две реакции диссоциации O_2 и N_2 ; остальные реакции, происходящие с участием окиси азота NO , по своему энергетическому вкладу существенно уступают первым двум, тем более, что равновесные концентрации NO обычно не превышают 10%. Однако при оценке реального влияния химических реакций с участием NO на характеристики пограничного слоя следует, по-видимому, учитывать не только их прямой "энергетический" вклад, но также их возможное влияние на кинетику протекания первых двух реакций системы (4.41). Последнее соображение делает целесообразным детальный анализ возможного влияния каждой из реакций этой системы.

Приводимый ниже анализ свойств турбулентного пограничного слоя основывался на использовании кинетической модели диссоциирующего воздуха, включающей в себя все шесть реакций системы (4.41). При этом отметим, что первоначальным основанием для включения шестой реакции в систему основных реакций послужили данные работ [224, 225], согласно которым было найдено, что константа скорости прямой реакции (4.41)₍₆₎ достаточно существенна. Однако последующие исследования скорости реакции (4.41)₍₆₎ [226] привели к значению константы скорости на порядок меньше, чем в работах [224, 225], что и дало некоторое основание для неучета этой реакции в ряде работ. Укажем еще, что в работе [226] отмечалось, что на баланс окиси азота возможно существенное влияние оказывает реакция



Включение этой реакции в кинетическую модель диссоциирующего воздуха привело бы к ее значительному усложнению в связи с появлением новой компоненты N_2O . Для этого, естественно, нужны веские основания, которых в настоящее время недостаточно.

Основным источником данных по константам скоростей реакций является эксперимент, однако для ряда реакций, протекающих в

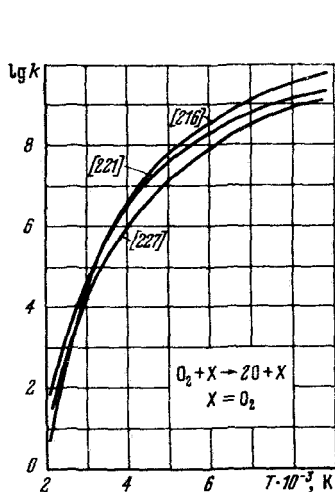


Рис. 71.

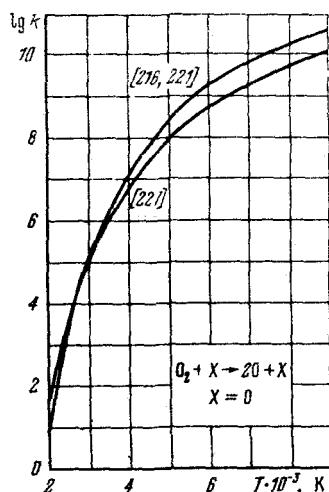


Рис. 72.

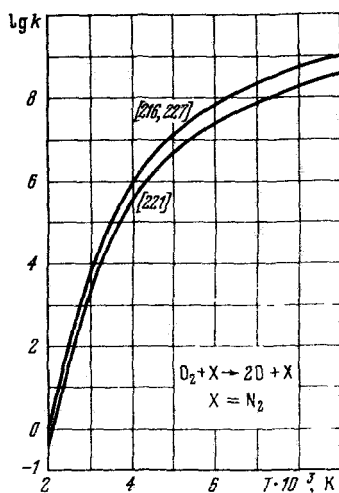


Рис. 73.

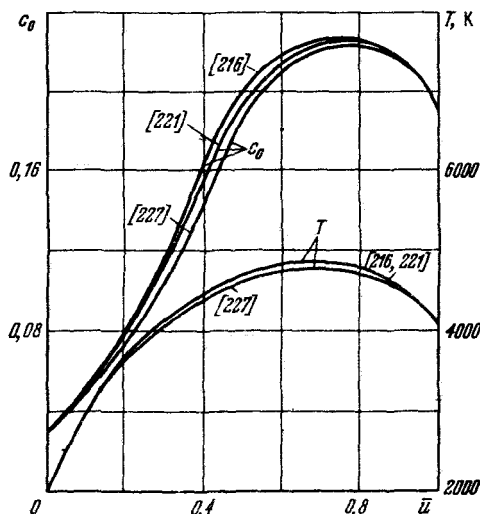


Рис. 74.

воздухе, число надежных измерений, проведенных в широком диапазоне температур, до настоящего времени невелико. Это обстоятельство приводит к заметному "разбросу" данных о константах скоростей, приводимых различными авторами. Об этом, в частности, свидетельствуют данные трех работ [216, 221, 227] по константам диссоциации кислорода и азота, приведенные в табл. 12.

На рис. 71-73 приведены зависимости констант скоростей реакций диссоциации кислорода от температуры для разных каталитических частиц. Следует отметить, что результаты Рея для столкновений

Таблица 12

	$A = \exp(-T_d/T)$	
	$O_2 + X \rightarrow 2 \cdot O + X, T_d = 59000 K$	$N_2 + X \rightarrow 2 \cdot N + X, T_d = 113200 K$
[221]	$k_{O_2} = 5,2 \cdot 10^{10} \cdot T_d^{-5/2} T_d^3 A$ $k_{N_2} = 25 \cdot 10^{10} \cdot T_d^{-1} T_d^{3/2} A$ $k_O = 625 \cdot 10^{10} \cdot T_d^{-1} T_d^{3/2} A$ $k_N = k_{NO} = k_{O_2}$	$k_{O_2} = k_{N_2}$ $k_N = 42,5 \cdot 10^{10} \cdot T_d^{-1,7} T_d^{2,2} A$ $k_O = k_{N_2} = k_{NO}$ $k_N = 185 \cdot 10^{10} \cdot T_d^{-1} T_d^{3/2} A$
[216]	$k_{O_2} = 9 k_N$ $k_{N_2} = 2 k_N$ $k_O = 25 k_N$ $k_N = 25 \cdot 10^{10} \cdot T_d^{-1} T_d^{3/2} A = k_{NO}$	$k_{O_2} = k_{NO} = k_O$ $k_{N_2} = 4,2 \cdot 10^{12} T_d^{-1/2} T_d A$ $k_O = 1,7 \cdot 10^{12} T_d^{-1/2} T_d A$ $k_N = 3,2 \cdot 10^{12} \cdot T_d^{-3/2} T_d^2 A$
[227]	$k_{O_2} = 9,6 \cdot 10^{22} \cdot T^{-2} A$ $k_{N_2} = 7,5 \cdot 10^{18} \cdot T^{-1} A$ $k_O = 26 \cdot 10^{22} \cdot T^{-2} A$ $k_N = k_{NO} = 3,6 \cdot 10^{18} T^{-1} A$	$k_{O_2} = k_{NO} = k_O$ $k_{N_2} = 50 \cdot 10^{16} \cdot T^{-1/2} A$ $k_O = 20 \cdot 10^{16} T^{-1/2} A$ $k_N = 4,2 \cdot 10^{22} T^{-3/2} A$

$O_2 - O_2$ при низких температурах, по-видимому, немного занижены, так как уменьшено влияние предэкспоненциального множителя $(\Delta E_n/(RT))$, где $n \approx 1,5$. Результаты экспериментов большинства авторов, проведенные в чистом кислороде, указывают, что при столкновении $O_2 - O_2$ предэкспоненциальный множитель значительно сильнее зависит от температуры ($n = 2 \div 3$). В этом случае, по-видимому, более обоснованно использовать выражение, полученное Е.В. Ступоченко и др. [221]. Данные по столкновению $O_2 - N_2$ у различных авторов в целом совпадают. Во многих экспериментах была обнаружена высокая активность атомов кислорода в процессе диссоциации кислорода O_2 . Рей, осредняя значения предэкспоненциальных множителей, предложенных различными авторами, получил $k_O = 25 \cdot k_{Ar}$, что совпадает с результатами Е.В. Ступоченко и др. [221]. Некоторое уменьшение значений констант при высо-

ких температурах, рекомендованные Лином и Тиром [227], связано, по-видимому, с влиянием возбуждения колебательных степеней свободы на скорость диссоциации. Несмотря на некоторое отличие в значениях констант скоростей у разных авторов, о чем свидетельствуют рис. 71-73, выбор констант не оказывает существенного влияния на распределение параметров пограничного слоя. Об этом, в частности, свидетельствуют данные рис. 74, на котором приведено распределение концентрации атомарного кислорода и температуры при различных значениях констант скоростей реакций (при расчете учитывались лишь две первые реакции системы (4.41)).

Приводимые ниже результаты расчетов были получены с использованием данных Е.В. Ступоченко и др. [221], представленных в табл. 10. В качестве констант равновесия использовались их приближенные выражения, предложенные Реем [216] и приведенные в табл. 9.

27.2. Другие условия расчета. В качестве граничного условия на поверхности использовался упрощенный вариант условия (4.160), а именно

$$j_{iw} = k_{wi} \rho_w c_{iw}. \quad (4.187)$$

Подставляя в левую часть равенства (4.187) выражение для диффузионного потока на стенке (4.170) и разрешая полученное соотношение относительно концентраций на стенке, получим для c_{iw} следующее выражение:

$$c_{iw} = \{1 + A_{wi} [1 - (1 - Sc_i) \bar{u}_\pi]\}^{-1} [c_{ie} + I_{Ti}(1) + Sc_i I_{\pi i}(\bar{u}_\pi) + (1 - \bar{u}_\pi) I_{\pi i}(\bar{u}_\pi)], \quad A_{wi} = \rho_w k_{wi} U_\infty / \gamma_w, \quad (4.188)$$

где A_{wi} — безразмерный параметр каталитической рекомбинации.

В процессе расчета три параметра каталитической рекомбинации для O, N и NO задавались произвольно. Для определения недостающих параметров A_{wi} и концентраций на стенке c_{iw} использовались четыре соотношения (4.188), условие равенства единице суммы концентраций и два условия равенства нулю диффузионных потоков элементов O и N (4.159), которые после несложных преобразований принимают вид

$$c_{Ow} A_{wO} + \frac{16}{30} c_{NOw} A_{wNO} + c_{O_2w} A_{wO_2} = 0, \quad (4.189)$$

$$c_{Nw} A_{wN} + \frac{14}{30} c_{NOw} A_{wNO} + c_{N_2w} A_{wN_2} = 0.$$

При расчете равновесных течений для определения состава газа использовались выражения для констант равновесия трех независимых реакций, в качестве которых были приняты первые три реакции системы (4.41). В качестве двух недостающих соотношений

использовались условие равенства единице суммы концентраций, условия (4.173) в вязком подслое и (4.174) в турбулентном ядре.

В условия (4.173) – (4.174) входят концентрации элементов C_O^* и C_N^* . В соответствии с равенством (4.158) для рассматриваемой смеси выражения для C_O^* и C_N^* имеют вид

$$C_O^* = C_O + C_{O_2} + \frac{16}{30} C_{NO}, \quad C_N^* = C_N + C_{N_2} + \frac{14}{30} C_{NO}. \quad (4.190)$$

Коэффициенты переноса чистых газов в вязком подслое определялись по формулам кинетической теории газов (1.65), (1.109), (1.114). Силовые постоянные для потенциала Леннарда – Джонса принимались в соответствии с данными [7], приведенными в табл. 1; интегралы столкновений вычислялись по приближенным соотношениям (1.70) [8]. Вязкость и теплопроводность смеси рассчитывались по формулам Уилки (1.71) и Масона – Саксены (1.113) соответственно. При расчете диффузии в многокомпонентной смеси использовались соотношения Стефана – Максвелла (1.93), записанные через эффективные коэффициенты диффузии (4.151).

27.3. Результаты расчетов¹. В этом пункте излагаются результаты расчетов течений диссоциирующего воздуха в турбулентном пограничном слое на плоской пластине и в окрестности звуковой линии на сфере. Рассмотрены равновесные и неравновесные течения воздуха на поверхностях с произвольной каталитической способностью. Анализируется влияние отдельных химических реакций, протекающих в воздухе, на дифференциальные и интегральные характеристики пограничного слоя. Проведена оценка влияния диффузии элементов на трение и тепловой поток. В заключение приводятся простые аппроксимационные формулы для расчета тепловых потоков на пластине в широком диапазоне изменения параметров внешнего потока и на стенке, а также номограммы максимальных тепловых потоков на сфере.

Исследование кинетической модели диссоциирующего воздуха. Для понимания процессов, происходящих в пограничном слое при неравновесном характере течения и упрощения кинетической модели, необходим анализ вклада каждой из реакций в общий механизм превращений и их влияния на теплообмен между газом и

1

Некоторые из приводимых ниже результатов содержатся в опубликованных ранее работах Ю.В. Лапина и Ю.С. Чумакова [199, 200]; другие, содержащиеся, в частности, в диссертации Ю.С. Чумакова: Тепло-массообмен в турбулентном пограничном слое в многокомпонентных газовых потоках при произвольных скоростях химических реакций. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат.наук, Ленинградский политехнический институт им.М.И.Калинина, 1975, публикуется впервые.

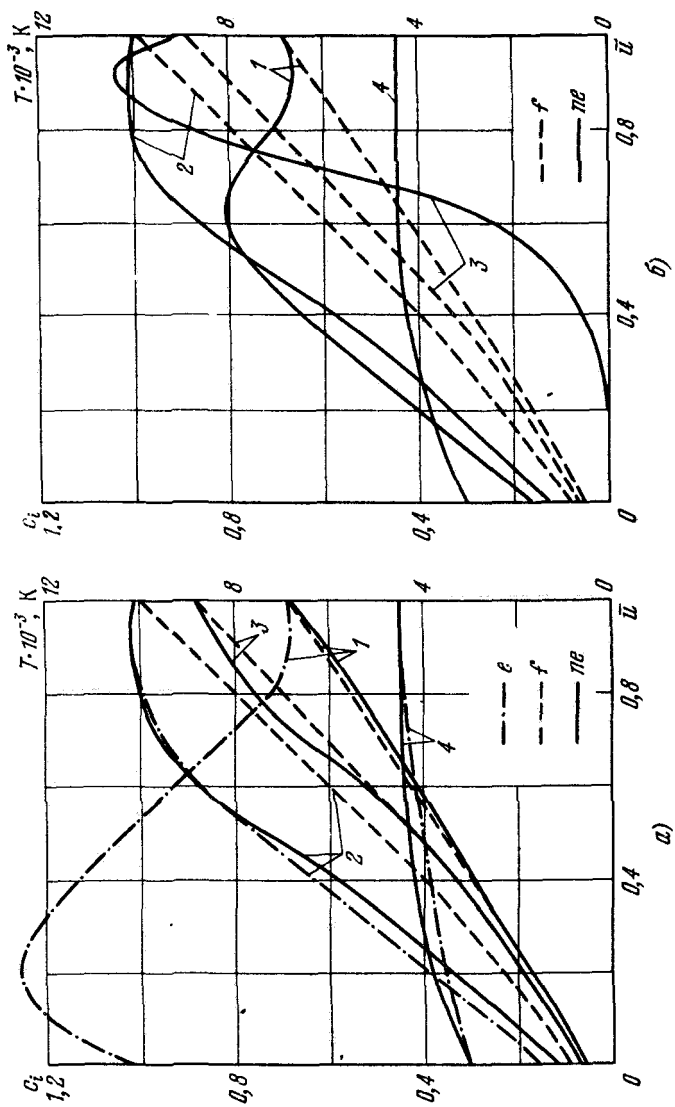


Рис. 75.

стенкой. Для проведения такого анализа были проведены расчеты с последовательным учетом или неучетом тех или иных реакций, входящих в систему (4.41). Во всех расчетах местное число Рейнольдса определялось по длине $x = 1$ м. Условия во внешнем потоке считались равновесными.

На рис. 75 для иллюстрации приведены поля концентраций и температуры в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой потоком со скоростью $U_e = 4000$ м/с и давлением $p = 1$ атм. Температуры на поверхности и внешней границе пограничного слоя принимались равными $T_w = 3000$ К и $T_e = 4500$ К соответственно. Параметры каталитической рекомбинации для O , N , NO принимались одинаковыми и равными $A_{wi} = 20$ ($i = O, N, NO$), что соответствует условиям на абсолютно каталитической стенке. Сплошными кривыми изображены параметры при неравновесном течении, штриховыми – при замороженном, штрих-пунктирами – при равновесном; цифрами обозначены кривые: 1 – $20 c_{NO}$, 2 – $5 c_O$, 3 – $200 c_N$, 4 – T . Элементарный состав газа принимался постоянным по сечению пограничного слоя, равным составу на внешней границе.

На рис. 75, а приведены результаты, полученные с учетом трех реакций (4.41)(1) – (4.41)(3), а на рис. 75, б – с учетом пяти реакций (4.41)(1) – (4.41)(4), (4.41)(6). Тепловой поток и коэффициент трения при неравновесном течении в обоих случаях вплоть до третьей значащей цифры оказались одинаковыми и равными $q_w = 1655$ ккал/м²·с, $c_f = 0,00351$ ($Re_x = 2 \cdot 10^6$).

Соответствующие значения тех же параметров в замороженном течении были равны $q_w = 1545$ ккал/м²·с, $c_f = 0,00334$. Учет диффузии элементов в неравновесном (ne) и замороженном (f) течениях не привел практически к изменению интегральных характеристик пограничного слоя (отмечено различие в четвертой значащей цифре).

Анализ этих и других проведенных расчетов показывает, что в исследованном диапазоне температур равновесие по реакциям (4.41)(4) – (4.41)(5) устанавливается гораздо быстрее, чем по реакциям (4.41)(1) – (4.41)(3). Это обстоятельство приводит к немоному характеру изменения концентрации окиси азота с максимумом в пограничном слое. Вследствие существенной разницы в энергиях диссоциации кислорода и азота диссоциация кислорода при температурах около 5000 К практически заканчивается, в то время как азот только начинает диссоциировать. Уменьшение концентрации молекулярного кислорода с ростом температуры приводит к тому, что реакция (4.41)(4) при высоких температурах практически не оказывает существенного влияния на состав смеси.

В целом, как показано в диссертации Ю.С. Чумакова (ссылку см. на стр. 284), для детального описания полей концентраций в

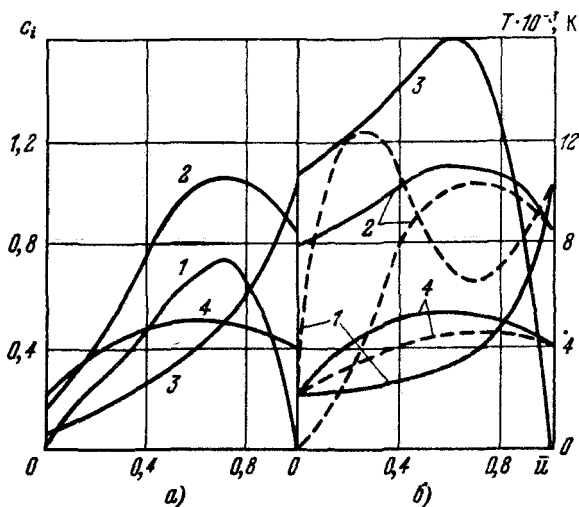


Рис. 76.

пограничном слое во всем исследованном диапазоне температур (до 8000 K), по-видимому, можно ограничиться учетом только первых четырех реакций системы (4.41). Для расчета интегральных характеристик (трения и теплового потока) можно удовлетвориться учетом первых двух реакций (4.41).

Влияние каталитических свойств поверхности на трение и теплообмен. На рис. 76 представлены поля концентраций и температур (обозначения те же, что и на рис. 75) в пограничном слое плоской пластины при следующих условиях течения. $U_e = 6400$ м/с,

$T_w = 2000$ K, $T_e = 4000$ K, $p_e \approx 1$ атм, $Re_x = 4 \cdot 10^6$. Расчет неравновесного течения проведен с учетом трех реакций (4.41)(1) - (4.41)(3) и с различными условиями катализа на стенке. На рис. 76, а параметры каталитической рекомбинации были приняты равными $A_{wi} = 20$ ($i = O, N, NO$) (практически абсолютно каталитическая стенка), а на рис. 76, б $A_{wi} = 1$ ($i = O, N, NO$),

что соответствует условиям на некаталитической стенке. Тепловые потоки и коэффициент трения получились равными: $q_w^{(ne)} =$

$= 4340$ ккал/(м²·с), $c_f^{(ne)} = 0,00265$, $q_w^{(f)} = 3910$ ккал/(м²·с), $c_f^{(f)} = 0,00244$ - на каталитической стенке; $q_w^{(ne)} =$
 $= 3560$ ккал/(м²·с), $c_f^{(ne)} = 0,00246$, $q_w^{(f)} = 3590$ ккал/(м²·с), $c_f^{(f)} = 0,00237$ - на некаталитической стенке. Учет диффузии эле-

ментов привел к изменению q_w и c_f лишь в третьей значащей цифре.

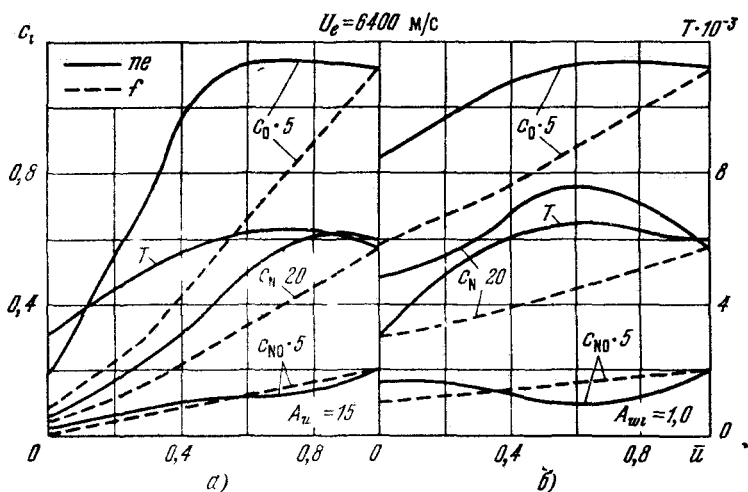


Рис 77.

На рис. 77 представлены профили концентраций и температуры в пограничном слое плоской пластины для замороженного (штриховая линия) и неравновесного (сплошная кривая) режимов течения на абсолютно каталитической (рис. 77, а, параметр рекомбинации $A_{wl} = 15$) и некаталитической (рис. 77, б, $A_{wl} = 1$) поверхностях. При этом расчет неравновесного режима здесь и далее производился с учетом реакций (4.41)(1) – (4.41)(3); значения параметров течения были выбраны следующими: $U_e = 6400$ м/с, $T_e = 6000$ К, $p = 1$ атм. Из рис. 77 нетрудно видеть, что при заданных температурных условиях на поверхности различие в концентрациях атомов на поверхности при том и другом режимах течения тем больше, чем меньше каталитическая способность поверхности. Таким образом, с ростом каталитической способности стенки ослабляется влияние реакций, протекающих в газовой фазе, на теплообмен между газом и поверхностью. К этому же выводу можно прийти, если заметить, что тепловой поток от газа к стенке в основном определяется разностью полных энтальпий на внешней границе пограничного слоя и на поверхности и сравнительно мало зависит от характера распределения концентраций компонент в слое.

Иллюстрацией к сказанному служат данные, приведенные в табл. 13, 14 ($U_e = 6400$ м/с, $p = 1$ атм; $T_w = 2000$ К, $T_e = 4000$ К – табл. 13; $T_w = 3000$ К, $T_e = 6000$ К – табл. 14), из которых следует, что на абсолютно каталитической поверхности ($A_{wl} = 15$) тепловой поток при неравновесном и замороженном течениях отличается от потока для равновесного течения примерно на 10%. В то же время на некаталитической поверхности ($A_{wl} = 1$) это различие может достигать 30% от равновесного значения.

Таблица 13

	A_{wl}	q_w ккал/(м ² ·с)	$c_f \cdot 10^2$
не	15	4341	0,265
	1,0	3558	0,246
f	15	3908	0,244
	1,0	3593	0,237
e		4421	0,271

Таблица 14

	A_{wl}	q_w ккал/(м ² ·с)	$c_f \cdot 10^2$
не	15	4305	0,360
	1,0	3065	0,325
f	15	3843	0,327
	1,0	3140	0,308
e		3541	0,376

На рис. 78 ($U_e = 6400$ м/с, $p = 1$ атм) представлены профили температур для различных типов течений (замороженное - f, неравновесное - не, равновесное - e) и разных значений параметра рекомбинации A_{wl} : ($A_{wl} = 1,0$ - штриховые кривые, $A_{wl} = 15$ - сплошные). Как видно из графика, максимального значения температура достигает при замороженном режиме течения. При увеличении скорости реакций в газовой фазе (учитывались реакции (4.41)(1) - (4.41)(3)) величина этого максимума уменьшается.

На рис. 79 ($U_e = 6400$ м/с) представлена зависимость теплового потока от константы скорости каталитической рекомбинации для замороженного (штриховая кривая) и неравновесного (сплошные кривые) режимов течения. При более низкой температуре поверхности ($T_w = 1000$ К), как это следует из графика, каталитичес-

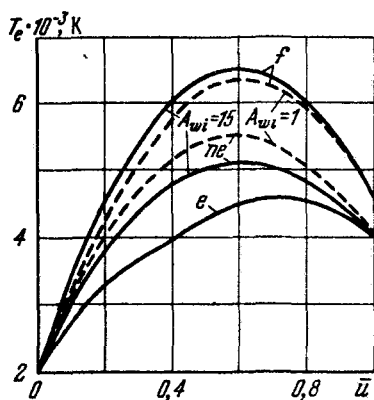


Рис. 78.

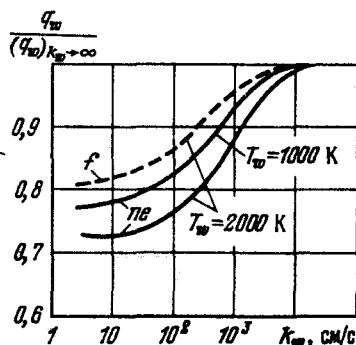


Рис. 79.

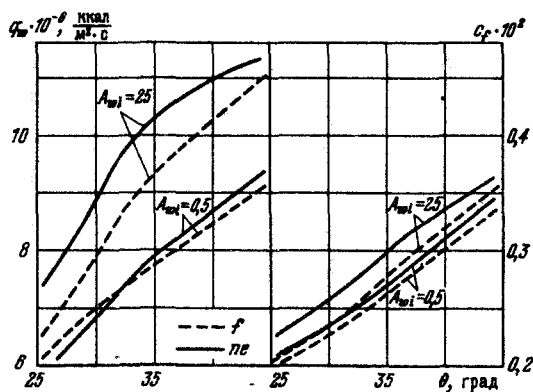


Рис. 80.

кие свойства оказывают меньшее влияние на тепловой поток, чем при высокой температуре ($T_w = 2000$ K). Это нетрудно объяснить,

если учесть, что скорость рекомбинации атомов в молекулы тем выше, чем ниже температура вблизи стенки. Иными словами, чем ниже температура стенки, тем меньше концентрация атомов в газовой фазе вблизи стенки и, следовательно, тем меньшее влияние на основе газа вблизи стенки оказывают реакции каталитической рекомбинации на стенке.

В течениях, далеких от равновесного режима, определяющее влияние на тепловой поток оказывают процессы каталитической рекомбинации на стенке. Это следует, в частности, из рис. 80, на котором изображены тепловой поток и коэффициент трения на клине при различных углах полураствора ($p_e = 0,0129$ атм,

$U_e = 7$ км/с, $T_w = 2000$ K, $T_e = 220$ K, $H = 30$ км). Влия-

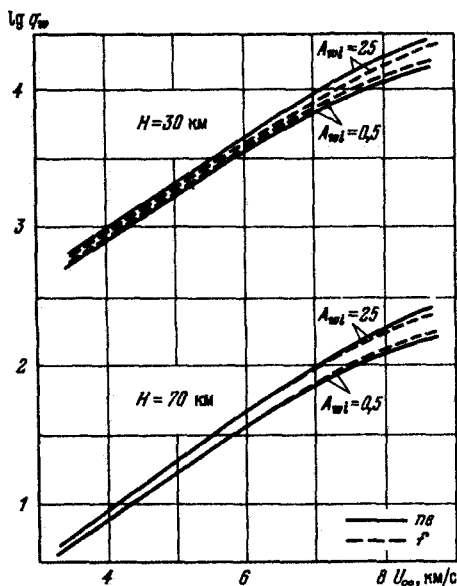


Рис. 81.

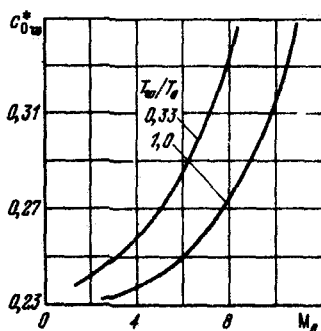


Рис. 82.

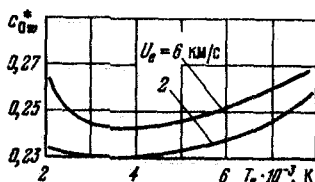


Рис. 83.

ние химических процессов на трение проявляется в меньшей степени.

На рис. 81 представлено распределение теплового потока на поверхности клина с углом полураствора 30° для двух высот 30 км и 70 км. Видно, что на высоте 70 км реакции в газовой фазе практически заморожены.

Диффузия элементов в вязком подслое. Все предыдущие выводы были сделаны на основании расчетов, проведенных в предположении что элементарный состав смеси в вязком подслое постоянен по сечению и является таким же, как в турбулентном ядре и внешнем потоке, т.е. концентрация элемента кислорода, например, $C_0^* = C_0 + C_{O_2} + (16/30)C_{NO} = \text{const} = C_{0e}^*$. Постоянство концентрации элемента азота следует из условия $C_0^* + C_N^* = 1$, где $C_N^* = C_N + C_{N_2} + (14/30)C_{NO}$. В действительности, вследствие различия в коэффициентах молекулярной диффузии отдельных компонент, в вязком подслое может иметь место перераспределение элементов (эффект разделения элементов).

Расчеты равновесных течений с использованием уравнений диффузии элементов показывают, что изменение элементного состава в вязком подслое может оказаться довольно значительным. На рис. 82, 83 представлены зависимости концентрации элемента кислорода на стенке от числа Маха и температуры на внешней границе пограничного слоя.

При больших числах Маха M_0 , как видно из рис. 82, C_0^* достигает значения 0,35, т.е. почти на 50% превосходит значение этой

величины во внешнем потоке. Расчет интегральных характеристик (трения и тепловых потоков) с учетом и без учета диффузии элементов показал, что изменение элементного состава смеси в вязком подслое не оказывает существенного влияния на эти характеристики (различие составило около 1%). Иными словами, при расчете интегральных характеристик в области диссоциации эффектом разделения элементов можно, по-видимому, пренебрегать. Можно ожидать, что в иных ситуациях, например при горении поверхности тела, этот эффект может оказаться более существенным.

Приближенные аппроксимационные формулы для тепловых потоков и трения на пластине. Путем обработки методом наименьших квадратов результатов многочисленных расчетов замороженного и равновесного течений на плоской пластине (клине) были получены приближенные формулы для коэффициента поверхностного трения и теплового потока [200].

В качестве определяющих параметров были выбраны скорость, давление и температура на внешней границе пограничного слоя: в этом случае можно не конкретизировать форму тела (пластина, клин) и его угол атаки. Определение параметров за косым скачком уплотнения или веером волн разрежения производилось на основе известных методик с учетом процессов диссоциации.

Приближенная формула для теплового потока на пластине при замороженном течении имеет следующий вид:

$$q_{tw}^{(f)} = 0,4 \rho_e U_e c_{f0} Pr^{-2/3} \left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right) \left[c_{pe} T_e + Pr^{1/3} \frac{U_e^2}{8372} - c_{pw} T_w + Pr^{2/3} \sum_i c_{iw} A_{wi} h_i^0 \right] \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \quad (4.191)$$

Здесь $\rho_e \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$, $U_e \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$, $T_e [\text{K}]$, $c_{pe} \left[\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{K}} \right]$ - плотность, скорость, температура, удельная теплоемкость воздуха на внешней

границе пограничного слоя, соответственно, c_{pw} , T_w - удельная теплоемкость и температура на стенке, c_{f0} - коэффициент трения в несжимаемой жидкости, определяемый по формуле

$$c_{f0} = 0,0263 Re_x^{-1/2}, \quad Re_x = \rho_e U_e x / \mu_e,$$

Re_x , μ_e - число Рейнольдса и коэффициент динамической вязкости, рассчитанные по параметрам на внешней границе.

Подчеркнем, что суммирование в последнем члене предыдущего соотношения производится только по компонентам O, N и NO ($h_O^0 = 3720$ ккал/кг, $h_N^0 = 8060$ ккал/кг, $h_{NO}^0 = 720$ ккал/кг - стандартные теплоты образования компонент).

Таблица 15

$$T_w = 2000, \quad A_{wi} \approx 0,1$$

$\begin{matrix} p_e, \text{атм} \\ T_e, \text{K} \end{matrix}$	0,1	1,0	10	100	
2000	0,727	0,727	0,727	0,726	Sc_{NO}
	0,530	0,530	0,530	0,529	Sc_N
	0,532	0,532	0,532	0,532	Sc_O
	0,674	0,674	0,674	0,674	Pr
3000	0,761	0,740	0,731	0,729	Sc_{NO}
	0,565	0,543	0,534	0,532	Sc_N
	0,567	0,545	0,537	0,534	Sc_O
	0,674	0,676	0,677	0,677	Pr
4000	0,820	0,800	0,765	0,742	Sc_{NO}
	0,625	0,604	0,569	0,545	Sc_N
	0,627	0,606	0,571	0,647	Sc_O
	0,666	0,670	0,675	0,678	Pr
5000	0,846	0,827	0,807	0,774	Sc_{NO}
	0,652	0,631	0,611	0,577	Sc_N
	0,654	0,634	0,613	0,580	Sc_O
	0,646	0,660	0,665	0,671	Pr
6000	0,964	0,873	0,833	0,804	Sc_{NO}
	0,772	0,679	0,638	0,608	Sc_N
	0,775	0,681	0,640	0,610	Sc_O
	0,646	0,660	0,665	0,671	Pr

Продолжение табл. 15

$p_e, \text{атм}$ T_e, K	0,1	1,0	10	100	
7000	1,101	0,992	0,885	0,832	Sc_{NO}
	0,915	0,802	0,692	0,636	Sc_N
	0,917	0,804	0,694	0,639	Sc_O
	0,621	0,641	0,658	0,667	Pr
8000	1,130	1,096	0,981	0,876	Sc_{NO}
	0,945	0,910	0,791	0,632	Sc_N
	0,947	0,912	0,793	0,684	Sc_O
	0,616	0,622	0,643	0,660	Pr

Концентрации компонент c_O , c_N , c_{NO} на поверхности определяются по соотношению

$$c_{iw} = c_{ie} / (A_{wi} Sc_{iw}^{2/3} + 1). \quad (4.192)$$

Здесь c_{ie} — концентрация i -й компоненты на внешней границе,

A_{wi} — параметр каталитической рекомбинации

$$A_{wi} = \frac{p_w}{p_e} \frac{k_{wi}}{U_e} \frac{2}{c_f}, \quad (4.193)$$

k_{wi} — константа скорости каталитической рекомбинации [м/с].

Числа Прандтля $Pr = \mu c_p / \lambda$ и эффективные числа Шмидта

$Sc_i = \mu / (\rho D_i)$ приведены в табл. 15. Причем в таблице приводятся значения этих чисел только для некаталитической поверхности ($A_{wi} = 0,1$).

Для абсолютно каталитической поверхности ($A_{wi} = 30$) эффективные числа Шмидта и число Прандтля оказались с точностью 1–2% не зависящими от температуры на внешней границе пограничного слоя T_e и давления p_e . Средние значения этих чисел равны: $Sc_O = 0,536$, $Sc_N = 0,535$, $Sc_{NO} = 0,732$, $Pr = 0,673$.

Таблица 16

p , атм	a'	a''	a'''	b'	b''
0,1	2,3550	-2,4090	1,1664	-0,1743	0,1026
1,0	2,3834	-2,6177	1,4105	-0,1759	0,1195
10	2,3363	-2,3539	1,1797	-0,1887	0,1402
100	2,2663	-2,0660	0,9728	-0,1769	0,0954
0,1	1,5202	-0,3621	-0,0408	-0,1225	0,0037
1,0	1,5713	-0,3732	-0,0846	-0,0880	-0,1344
10	1,7216	-0,6785	0,0958	-0,1215	-0,0525
100	1,8546	-0,9544	0,595	-0,1366	-0,0092

Таблица 16 (окончание)

p , атм	b'''	c'	c''	c'''	A_{wi}
0,1	-0,0082	-0,0150	0,0534	-0,0375	30,0
1,0	-0,0353	-0,0148	0,0531	-0,0371	
10	-0,0429	-0,0117	0,0509	-0,0418	
100	-0,1121	-0,0084	0,0360	-0,0259	
0,1	0,0301	-0,0020	0,0108	-0,0059	0,1
1,0	-0,1411	-0,0122	0,0462	-0,0329	
10	0,0863	-0,0085	0,0358	-0,0258	
100	0,0528	-0,0080	0,0334	-0,0235	

Результаты расчетов отношения c_i/c_{i0} в диапазоне изменения параметров $p_e = 0,1; 1, 10, 100$ атм; $2000 \leq T_e \leq 8000$ К, могут быть представлены соотношением

$$\frac{c_i}{c_{i0}} = a + b M_e + c M_e^2, \quad (4.194)$$

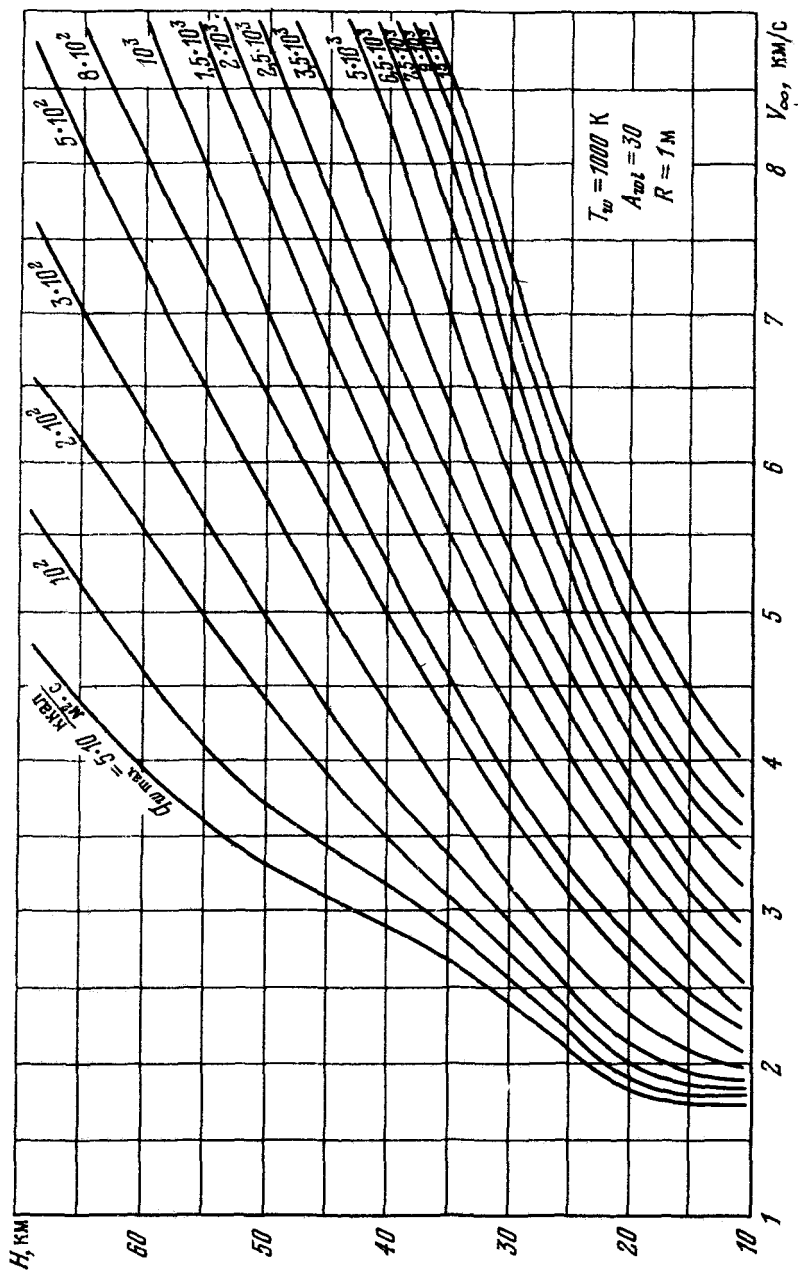


Рис. 84.

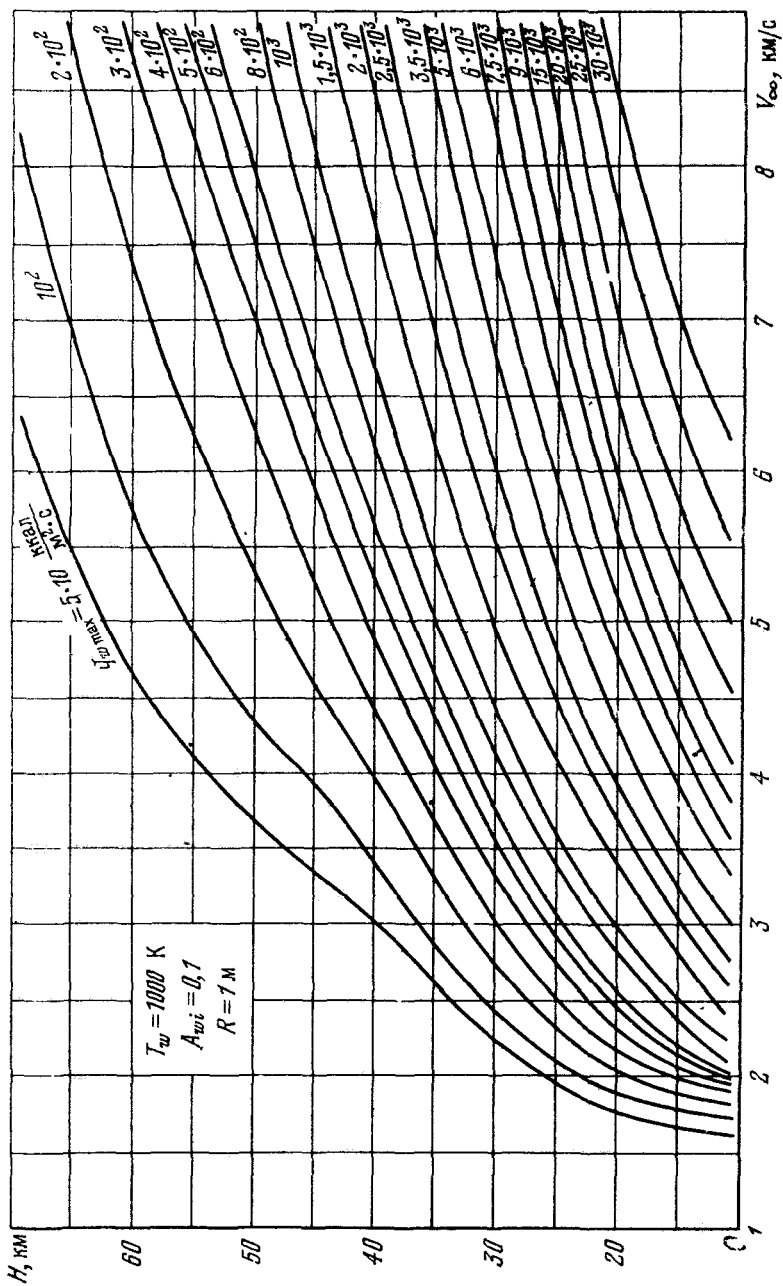


Рис. 85.

Таблица 17

p, атм	a			b	
	a'	a''	a'''	b'	b''
0,1	1,0229	-0,0243	0,2053	0,0085	0,0865
1,0	0,8478	0,2474	-0,2197	0,0132	0,1056
10	0,8277	0,2648	-0,1727	0,0407	0,0150
100	0,7081	0,2851	-0,1635	0,0205	0,0305

где

$$a = a' + a'' \left(\frac{T_w}{T_e} \right) + a''' \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^2, \quad b = b' + b'' \left(\frac{T_w}{T_e} \right) + b''' \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^2, \\ c = c' + c'' \left(\frac{T_w}{T_e} \right) + c''' \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^2. \quad (4.195)$$

Значения коэффициентов $a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c'''$ приведены в табл. 16.

Формула для определения теплового потока при равновесном течении $q_w^{(e)}$ имеет вид

$$q_w^{(e)} = (q_w^{\frac{1}{2}})_{k_{wi} \rightarrow \infty} \cdot F(M_e, T_w/T_e). \quad (4.196)$$

Здесь $(q_w^{\frac{1}{2}})_{k_{wi} \rightarrow \infty}$ — тепловой поток на абсолютно каталитической пластине ($A_{wi} = 30$) при замороженном течении. Функция F представлена в виде

$$F = a + b M_e + c M_e^2,$$

M_e — число Маха на внешней границе пограничного слоя. Коэффициенты a, b, c являются функциями температурного фактора T_w/T_e и выражаются равенствами, подобными предыдущим равенствам (4.195), с тем, однако, отличием, что коэффициенты $a', a'', a''', b', b'', b''', c', c'', c'''$ имеют другие значения, которые приводятся в табл. 17.

Номограммы для определения максимальных тепловых потоков на сфере. По изложенной выше методике были проведены систематические расчеты максимальных тепловых потоков на сфере для замороженного течения в пограничном слое. При расчете тепловых потоков необходимо задавать параметры в передней критической точке. В качестве таких параметров выбирались температура и

ξ	ϵ			p , атм
ξ'''	ϵ'	ϵ''	ϵ'''	
-0,0239	0,0200	-0,0594	0,0409	0,1
-0,0771	0,0188	-0,0579	0,0399	1,0
0,0314	0,0102	-0,0333	0,0232	10
0,0411	0,0084	-0,0261	0,0183	100

давление торможения, которые определялись по номограммам, приведенным на рис. 69-70. Для каждой высоты полета и скорости на бесконечности производился расчет теплового потока на поверхности сферы, после чего находилось его максимальное значение.

Максимальные тепловые потоки изображены в плоскости $H-V_\infty$ в виде линий равных значений на рис. 84-85. Отметим, что своего максимума тепловые потоки на сфере достигают в окрестности звуковой линии (при $\theta \approx 45^\circ$).

На рис. 84 приведены номограммы максимальных тепловых потоков для сферы радиуса $R = 1$ м с абсолютно каталитической поверхностью ($A_{wi} = 30$) при температуре стенки $T_w = 1000$ К.

На рис. 85 представлены результаты для абсолютно некаталитической поверхности сферы того же радиуса $R = 1$ м и $T_w = 1000$ К.

Как следует из анализа влияния химических процессов в газовой фазе и на поверхности тел максимальные тепловые потоки на сфере с абсолютно каталитической поверхностью (рис. 84) будут максимальными и по абсолютной величине по сравнению с потоками при замороженном течении в слое на некаталитической поверхности и потоками при равновесном режиме течения в слое. Следовательно, данные рис. 84 можно использовать для проведения оценки верхней границы максимально возможных тепловых потоков в области диссоциации.

§ 28. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Число исследований турбулентных пограничных слоев в диссоциирующем газе на основе численного интегрирования уравнений переноса, проведенных до настоящего времени, крайне невелико. Ниже рассматриваются результаты двух таких исследований [113, 117].

В работе Ю.Е. Карякина и Ю.В. Лапина [113] исследовалось равновесное течение диссоциирующего воздуха в пограничном слое

на плоской пластине и на сфере, обтекаемых сверхзвуковым потоком. В основу исследования положена двухслойная схема, согласно которой весь слой делится на две области: внутреннюю (область закона стенки) и внешнюю (область закона следа). Для определения эффективной вязкости во внутренней области применялась формула Прандтля с демпфирующим множителем Ван-Дриста, модифицированная Себеси (2.158), (2.169). В качестве коэффициента турбулентной вязкости во внешней области использовалась формула Клаузера с поправкой на перемежаемость (2.175).

Турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта предполагались равными единице. Граница между внутренней и внешней областями определялась из условия равенства вязкостей $(\mu_t)_i = (\mu_t)_0$.

Уравнения переноса записывались в переменных Лиза - Дородницына (3.33) - (3.35).

Рассматривалось движение диссоциирующего воздуха, в котором протекают три реакции (4.41)₍₁₎ - (4.41)₍₃₎ (пятикомпонентная смесь). Для определения констант равновесия использовались аппроксимация Рея (см. табл. 9). Три алгебраических соотношения для констант равновесия замыкались уравнением диффузии элемента (кислорода) и условием равенства единице суммы концентраций. Диффузионные потоки в пристенной (внутренней) области определялись с помощью соотношений Стефана - Максвелла (1.93). Используемая в работе методика интегрирования уравнений пограничного слоя описана в работе Ю.Е. Карякина и В.Г. Шарова [112].

Расчет на сфере начинался от передней критической точки, в которой слой считался ламинарным. Во всех следующих сечениях пограничный слой рассматривался как развитый турбулентный слой.

Результаты расчетов для сферы диаметром $2R = 1$ м, обтекаемой потоком с числом Маха $M_\infty = 15$, на высоте 10 км приведены на рис. 86-91. Температура стенки принималась равной $T_w = 1000$ К.

На рис. 86 изображены распределения давления (p) на сфере, теплового потока (q_w) и коэффициента трения ($c_f = 2\tau_w / (\rho_e U_e^2)$).

На рис. 87 представлены профили скорости и полной энтальпии в сечениях с угловыми координатами $\theta = 0$ и 5° . Из рисунка видно, что в полностью развитом турбулентном пограничном слое эти профили приблизительно подобны, что свидетельствует об обоснованности приближения локального подобия, использованного в предыдущих параграфах для анализа основных тенденций в поведении свойств пограничного слоя.

На рис. 88-91 последовательно изображены профили температуры, концентраций элемента (кислорода) и компонент. Обращает на себя внимание существенное различие в характере изменения концентрации элемента-кислорода (рис. 88) в ламинарном и турбулентном слоях. Расчеты показали, что эффект диффузии элементов не сказывается на интегральных характеристиках слоя (трение

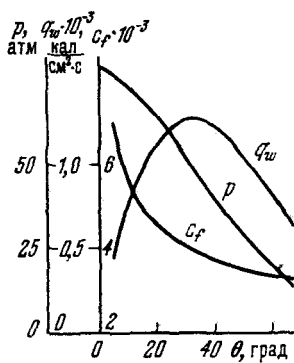


Рис. 86.

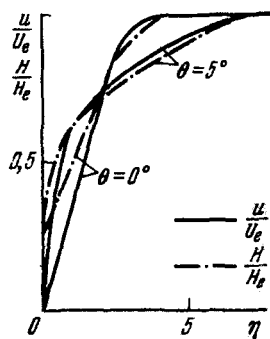


Рис. 87.

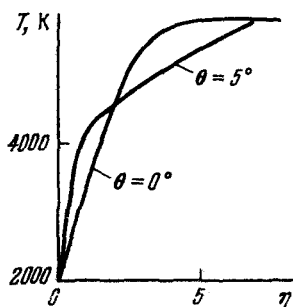


Рис. 88.

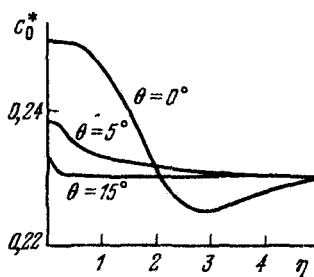


Рис. 89.

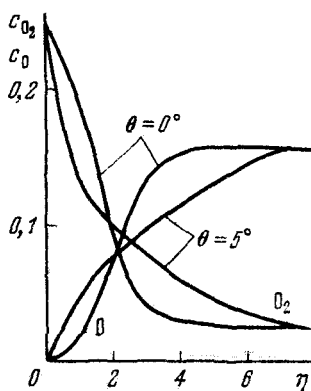


Рис. 90.

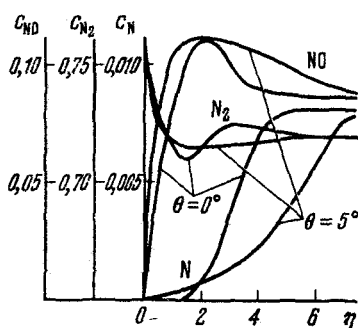


Рис. 91.

и тепловой поток), что соответствует выводу, сделанному ранее на основе приближения локального подобия.

В работе Р.А. Сафарова и Г.А. Тирского [117] также на основе численного метода исследовались свойства турбулентного пограничного слоя на сфере при замороженном течении в пограничном слое. В основу расчета была положена трехслойная гипотеза тур-

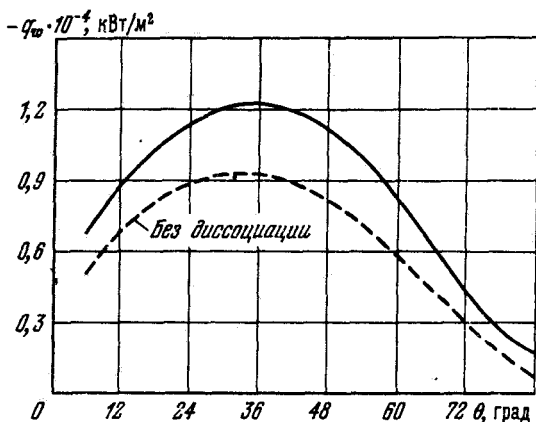


Рис. 92.

булентности Меллора [177]. На рис. 92, заимствованном из работы [117], приведены распределения теплового потока на сфере с учетом диссоциации (замороженное течение, верхняя кривая) и без ее учета (нижняя кривая). Как следует из рисунка, различие в максимальных тепловых потоках достигает 25%, что также хорошо согласуется с ранее сделанными оценками.

В заключение отметим, что почти полное отсутствие опытных данных по характеристикам турбулентных пограничных слоев в диссоциирующем газе не дает возможности произвести оценку точности изложенных методов расчета. Многие аспекты рассматриваемой проблемы остаются неясными. В ряду таких проблем следует прежде всего указать на проблему воздействия турбулентности на скорости химических реакций. Неясна также в общем случае степень влияния химических реакций на характеристики турбулентности и процессы турбулентного переноса. В последние годы интерес к этим проблемам существенно возрос, сформулированы некоторые приближенные подходы к оценке этих эффектов. Однако имеющиеся в этой области отдельные частные достижения не относятся, как правило, к течениям в пристенных турбулентных пограничных слоях, что затрудняет проведение необходимых оценок.

Серьезной проблемой, также ждущей еще своего решения, является проблема определения влияния пульсаций плотности в сильно неизотермических турбулентных течениях с химическими реакциями на процессы переноса тепла, количества движения и вещества. Перечень нерешенных проблем можно естественно продолжить. Тем не менее можно надеяться, что оценка основных тенденций в поведении характеристик турбулентных пограничных слоев в диссоциирующем газе, проведенная в настоящей главе на основе рассмотренных выше методов, является достаточно достоверной и при существующем состоянии теории турбулентности, вероятно, единственно возможной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей/Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов/Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1960.
3. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах/Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.
4. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.
5. Кинетические процессы в газах и плазме. Сб. статей под ред. А. Хохштимы. — М.: Атомиздат, 1972.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — 4-е изд. перераб. — М.: Наука, 1973.
7. Svehla R.A. Estimated viscosities and thermal conductivities of gases at high temperature — NASA TR, 1961, R-132.
8. Анфимов Н.А. Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
9. Wilke C.R. A viscosity equation for gas mixtures. — J. Chem. Phys., 1950, v. 18, № 4, 517–522.
10. Голубев И.Ф. Вязкость газов и газовых смесей. — М.: Физматгиз, 1959.
11. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. — М.; Л.: Химия, 1966.
12. Curtiss C.F. Symmetric gaseous diffusion coefficients. — J. Chem. Phys., 1968, v. 49, № 7.
13. Гурвич Л.В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Том II. — М.: АН СССР, 1962.
14. Шетинков Е.С. Физика горения газов. — М.: Наука, 1965.
15. Muckenfuss C., Curtiss C.F. Thermal conductivity of multicomponent gas mixtures. — J. Chem. Phys., 1958, v. 29, 1273.
16. Mason E.A., Saxena S.C. Approximate formula for the conductivity of gas mixtures. — Phys. Fluids, 1958, v. 1, № 5, p. 361–369.
17. Гиршфельдер Дж. Теплопроводность в многоатомных и электронно-возбужденных газах. — В кн.: Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. — М.: ИЛ, 1959.
18. Хинце И.О. Турбулентность. — М.: Физматгиз, 1963.
19. Брэдшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. — М.: Мир, 1974.
20. Рейнольдс О. О динамической теории несжимаемой вязкой жидкости/Пер. с англ. — В кн.: Проблемы турбулентности. — М.: ОНТИ, 1936.
21. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Часть I — М.: Наука, 1965.
22. Ван-Дриест Е.Р. Турбулентный пограничный слой в сжимаемой жидкости. — Механика, Сб. пер., 1952, № 1.
23. Sebest T., Smith A.M.O. Analysis of turbulent boundary layers — N. Y., S.-F., L.: Academic Press, 1974.
24. Гиневский А.С., Иоселевич В.А., Колесников А.В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя. — В кн.: Механика жидкости и газа (Итоги науки и техники). — ВИНТИ, 1978, т. 11.

25. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. - М.: Наука, 1975.
26. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. - М.: Физматгиз, 1962.
27. Ван-Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. - В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. - М.: Мир, 1964.
28. Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. - М.: Мир, 1966.
29. Лунев В.В. Метод среднемассовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
30. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. - Л.: Судостроение, 1973.
31. Кутателадзе С.С. Пристенная турбулентность. - Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1973.
32. Современное состояние аэродинамики больших скоростей /Под ред. Хоуарта, Том 2. - М.: ИЛ, 1956.
33. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. - В кн.: Проблемы механики. Вып. 2. - М.: ИЛ, 1959.
34. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло и массообмен в пограничных слоях. - М.: Энергия, 1971.
35. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. - М.: Наука, 1970.
36. Хилл Ф.К. Измерение пограничного слоя в гиперзвуковом потоке. - Вопросы ракетной техники, Сб. пер., 1957, № 1.
37. Лобб Р.К., Винклер Е.М., Перш Дж. Экспериментальные исследования турбулентных пограничных слоев в гиперзвуковом потоке. - Вопросы ракетной техники, Сб. пер., 1955, № 5.
38. Bossinesq J. Theorie de l'equolement tourbilent. - Memoires presentees par diverses savants a l'Acad. d. Sci Paris, 1877, t 23.
39. La under B.E., Spalding D.B. Lectures in mathematical models of turbulence. - L.; N. Y.: Academic Press, 1972.
40. Prandtl L. Über die ausgebildete turbulenz. - ZAMM, 1925, 5.
41. Лойцянский Л.Г. Гипотеза локальности в турбулентном движении жидкости при наличии вязкости. - Прикладная математика и механика, 1958, т. 22, вып. 5.
42. Никурадзе И. Закономерности турбулентных течений в гладких трубах. - В кн.: Проблемы турбулентности. - М.; Л.: ОНТИ, 1936.
43. Прандтль Л. Новые результаты в исследовании турбулентности. - В кн.: Проблемы турбулентности. - М.; Л.: ОНТИ, 1936.
44. Escudier M.P. The distribution of mixing length in turbulent flows near walls. - Imperial College, Heat Transfer section, 1965 Rep. TWF 1 TN 11.
45. Van Driest E.R. On turbulent flow near a wall. - J. Aeronaut. Sci., 1956, v. 23, №10.
46. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969.
47. Deisler R. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt-numbers - NACA Rep., 1959, R-1210.
48. Лойцянский Л.Г. Перенос тепла в турбулентном движении. - Прикладная математика и механика, 1960, т. 24, вып. 4.
49. Совершенный В.Д. Модель полной вязкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя. Инж.-физ. журнал. 1974, т. 27, № 5.
50. Алексин В.А., Совершенный В.Д. Численный расчет турбулентного пограничного слоя с резким изменением граничных условий. - В кн.: Турбулентные течения. - М.: Наука, 1977.

51. Алексин В.А., Совершенный В.Д., Чикова С.П. Расчет турбулентного пограничного слоя на поверхностях с проницаемыми участками. — Известия АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
52. Себеси Т. Турбулентное течение у пористой стенки при наличии градиента давления. — Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 12.
53. Себеси Т., Смит А., Мосинский Г. Расчет сжимаемого адиабатического турбулентного пограничного слоя. — Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 11.
54. Launder B.E., Jones W.P. A note on Bradshaws hypotheses for laminarisation. — ASME Paper, 1969, 69-HT-12
55. Себеси Т. Метод решения обратной задачи теории пограничного слоя для сжимаемых ламинарных и турбулентных пограничных слоев. — Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 3.
56. Pletcher R.H. On a solution for turbulent boundary-layer flows with heat transfer pressure gradients and wall suction or blowing. — In: Fourth Int. Heat Transfer conf., Paris, v. 2, 1970.
57. Kays W.M., Moffat R.J., Thielbahr W.H. Heat transfer to the highly accelerated turbulent boundary layer with and without mass addition. — J. Heat Transfer, 1970, v. 13, 499.
58. Kuhn G.D., Nielsen J.N. Prediction of turbulent separated boundary layers. — AIAA Paper, 1973, № 663.
59. Ривз Б.Л. Двухслойная модель турбулентного пограничного слоя. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 7.
60. Себеси Т. Кинематическая турбулентная вязкость при малых числах Рейнольдса. — Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 1.
61. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. — Известия АН СССР, сер. физ., 1942, т. 6, № 1-2.
62. Prandtl L., Wieghardt K. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. — Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys., 1945, H. 6, 6-19.
63. Глушко Г.С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. — Известия АН СССР, МЖГ, 1965, № 4.
64. Акатнов Н.И., Кузнецов А.П. Уравнение баланса энергии турбулентности в теории свободного турбулентного пограничного слоя. — Известия АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
65. Акатнов Н.И., Тульверт В.Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений. — Известия АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
66. Rotta J.C. Statistische theorie nichthomogener Turbulenz. — Z. Physic, 1951, v. 129, № 6, 547-572; 1951, v. 131, № 1, 51-77.
67. Глушко Г.С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. — В кн.: Турбулентные течения. — М.: Наука, 1970.
68. Глушко Г.С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом. — Известия АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
69. Kovaszny L.S.G. Structure of the turbulent boundary layer. — Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 9.
70. Nee V.W., Kovaszny L.S.G. Simple phenomenological theory of turbulent shear flows — Phys. Fluids, 1969, v. 12, № 3.
71. Секундов А.Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомоделных течений. — Известия АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
72. Давыдов Б.И. К статистической теории турбулентности. — Доклады АН СССР, 1959, т. 127, № 5.
73. Давыдов Б.И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости. — Доклады АН СССР, 1961, т. 136, № 1.

74. Jones W.P., Launder B.E. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. — *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1973, v. 16, № 6.
75. Hanjalic K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. — *J. Fluid Mech.*, 1972, v. 52, № 4.
76. Bradshaw P., Ferris D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layers development using the turbulent energy equation — *J. Fluid Mech.*, 1967, v. 28, № 3.
77. Bradshaw P. The understanding and prediction of turbulent flow. — *Aeronaut. J.*, 1972, v. 76, № 739.
78. Bradshaw P. The effect of mean compression or dilatation on the turbulence of supersonic boundary layers. — *J. Fluid Mech.*, 1974, v. 63, № 3.
79. Адамс Дж. К. мл., Ходж Б.К. Применение усовершенствованной теории пути смещения к сжимаемому турбулентному пограничному слою. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1978, т. 16, № 7.
80. Сэффмен П.Г., Уилкоккс Д.К. Модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 4.
81. Computation of turbulent boundary layer. — 1968. Proc. AFOSR — IFR — Stanford Conf., v. 1—2, 1969.
82. Стурек В.Б. Распределение напряжения трения в турбулентном пограничном слое для сжимаемого течения с положительным градиентом давления. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 3.
83. Ли Р.Е., Смит Р.А. Определение характеристик турбулентного переноса на стенке сопла с $M = 5$. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1975, т. 13, № 2.
84. Хорстмен К.К., Оуэн Ф.К. Характеристики турбулентного сжимаемого пограничного слоя. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1972, т. 10, № 11.
85. Мейз Г., Макдональд Х. Длина пути смещения и турбулентная кинематическая вязкость в сжимаемом пограничном слое. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, т. 6, № 1.
86. Horstman C.C., Kussoy M.I., Coakley T.J., Rubesin M.W., Marvin J.G. Shock-wave-induced turbulent boundary-layer separation at hypersonic speeds. — *AIAA Paper*, 1975, № 4.
87. Baldwin B.S., McCormack R.W. Numerical solution of the interaction of a strong shock wave with a hypersonic turbulent boundary layer. — *AIAA Paper*, 1974, № 558.
88. Хорстмен К.К. Модель турбулентности для расчета неравновесных течений при положительном градиенте давления. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1977, т. 15, № 2.
89. Сполдинг Д.Б. Некоторые приложения нового метода расчета турбулентного пограничного слоя. — В кн.: Тепло- и массоперенос, т. 1. — М.: Энергия, 1968.
90. Лапин Ю.В., Шаров В.Г. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости при больших продольных перепадах давления и вдуве. — *Известия АН СССР, МЖГ*, 1974, № 2.
91. Ханг К.М., Маккормак Р.В. Численный расчет сверх- и гиперзвуковых течений сжатия около тупого (внутреннего) угла. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1977, т. 15, № 3.
92. Лапин Ю.В., Ярин А.Л. Проблема "срачивания" в теории неравновесных пристенных турбулентных течений. — *Известия АН СССР, МЖГ*, 1979, № 3.
93. Турбулентные течения в пограничном слое. Часть 1. — Феноменологические подходы и новые направления в исследовании турбулентности. Обзор ОНТИ ЦАГИ, 1979, № 553.
94. Reynolds W.C. Recent advances in the Computation of turbulent flows. — *Advances in Chemical Engineering*. — N.Y.; L., 1974, v. 9, p. 193—246.
95. Ступоченко Е.В., Стаханов И.П., Самуилов Е.В., и др. Термодинамические свойства воздуха в интервале температур от 1000 до

- 12 000°K и интервале давлений от 0,001 до 1000 атм. — В кн.: Физическая газодинамика. — М.: АН СССР, 1959.
96. Предводителев А.С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.
Предводителев А.С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха. — М.: Изд-во АН СССР, 1957.
 97. Laderman A.J., Demetriades A. Measurement of the mean and turbulent flow in a cooled wall boundary layer at Mach 9, 37. — AIAA Paper, 1972, № 73.
 98. Mikulla V., Horstman C. The measurement of shear stress and total heat flux in a non-adiabatic turbulent hypersonic boundary layer. — AIAA Paper, 1975, №119.
 99. Чжен К.Ю. Измерения турбулентного трения и теплового потока на поверхности конуса в гиперзвуковом потоке. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 11, № 11.
 100. Лиз Л. Ламинарная теплопередача в носовой части тела вращения при гиперзвуковых скоростях полета. — В кн.: Научные проблемы искусственных спутников Земли. — М.: ИЛ, 1959.
 101. Алексин В.А. К расчету сжимаемого турбулентного пограничного слоя. — В кн.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува / Под ред. Г.А. Тирского. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
 102. Алексин В.А., Совершенный В.Д., Чикова С.П. Расчет турбулентного пограничного слоя на поверхностях с проникаемыми участками. — Известия АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
 103. Бассина И.А., Дорот В.Л., Стрелец М.Х. Расчет пограничного слоя в сопле непрерывно действующего сверхзвукового химического лазера. — Известия АН СССР, МЖГ, 1979, № 3.
 104. Петухов И.В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. — Приложение к Журналу вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4.
 105. Громов В.Г. Химически неравновесный ламинарный пограничный слой в диссоциированном воздухе. — Известия АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
 106. Емельянова Г.Н. Численный метод решения уравнений плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости с продольным градиентом давления. — Труды ЦАГИ, 1973, вып. 1543.
 107. Mills R.D. The steady laminar incompressible boundary-layer problem as an integral equation in Crocco variables: the calculation of non-similar flow. — Aeronaut. Res. Council, R. and M., 1974, № 3742.
 108. Миллз Р.Д. Расчетные и экспериментальные исследования вязкого слоя между параллельными потоками. — Механика, сб. пер., 1969, № 2.
 109. Плетчер Р.Х. Конечно-разностный метод расчета турбулентного пограничного слоя с постоянными свойствами. — Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 2.
 110. Bradshaw P., Ferris D.H. Calculation of boundary layers development using the turbulent energy equation. — J. Fluid Mechanics, 1967, v. 28, pt. 3 p. 593–616.
 111. Nee V.W., Kovasznay L.S.G. The calculation of the incompressible turbulent boundary layers by a simple theory. — Proc. AFOSR — IFF — Stanford Conference, v. 1, 1969.
 112. Карякин Ю.Е., Шаров В.Г. Конечно-разностный метод расчета турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. — Инж.-физ. журнал, 1974, т. XXVI, № 2.
 113. Карякин Ю.Е., Лапин Ю.В. Численный расчет характеристик турбулентного пограничного слоя в равновесно диссоциирующем воздухе. — В кн.: Труды ЛПИ им. М.И.Калинина. — Л., 1976, № 352.
 114. Баев В.К., Головичев В.И., Ясаков В.А. Двумерные турбулентные течения реагирующих газов. — Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1976.

115. Блотнер Ф.Дж. Разностная схема с неравномерной сеткой для расчета турбулентных пограничных слоев. - В кн.: Численное решение задач гидромеханики. - М.: Мир, 1977.
116. Келлер Х.Б., Себеси Т. Точный численный метод расчета потоков в пограничном слое. II.: Двумерные турбулентные потоки. - Ракетная техника и космонавтика, 1972, т. 10, № 9.
117. Сафаров Р.А., Тирский Г.А. Применение феноменологических моделей к исследованию турбулентных пограничных слоев однородного и неоднородного газов. - В кн.: Турбулентные течения. - М.: Наука, 1977.
118. Игнатьев В.Н. О схеме повышенного порядка точности для расчета уравнений турбулентного пограничного слоя. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1972, т. 3, № 4.
119. Алексин В.А., Тирский Г.А., Шевелев Ю.Д. Численное исследование трехмерного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. - В кн.: Труды VI Международной конференции по численным методам в гидродинамике, Тбилиси, 1978.
120. Лойцянский Л.Г., Лалин Ю.В. Применение метода Кармана к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине в газовом потоке. - Тр. ЛПИ им. М.И. Калинина. М.; Л.: Машгиз, 1961, № 217.
121. Здункевич М.Д., Николаев А.М. Исследование обтекания клина с учетом реальных свойств воздуха. - Труды ЦАГИ, 1969, вып. 1127.
122. P i n s k n e y S.Z. Flat plate compressible turbulent boundary layer static temperature distribution with heat transfer. - AIAA Paper, 1967, № 195.
123. M i l l e r L.D. Predicting turbulent compressible boundary layers in strong adverse pressure gradient. - AIAA Paper, 1967, № 196.
124. B r o t t D.L., Y a n t a W.J., V o i s i n e t R.L. An experimental investigation of the compressible turbulent boundary layer with a favorable pressure gradient. - AIAA Paper, 1969, № 685.
125. K e m p J.H., S r e e k a n t h A.K. Preliminary results from an experimental investigation of nozzle wall boundary layers at Mach numbers ranging from 27 to 47. - AIAA Paper, 1969, № 686.
126. K l e b a n o f f P.S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. - NACA Rep., 1955, № 1247.
127. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. II / Под ред. С. Гольдштейна. - М.: ИЛ, 1948.
128. Козлов Л.В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена. - Известия АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
129. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. - Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
130. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое / Под ред. С.С. Кутателадзе. - Новосибирск: СО АН СССР, 1964.
131. P a r r a s C.C. Measurement of heat transfer in the turbulent boundary layer on a flat plate in supersonic flow and comparison with skin friction results. - NACA TN, 1954, № 3222.
132. Белянин Н.М. Расчет турбулентного пограничного слоя в сжимаемой жидкости при $Pr = 1$. - Труды ин-та им. Баранова, 1958, № 326.
133. C o l e s D. Measurements of turbulent friction on a smooth flat plate in supersonic flow. - J. Aero. Sci., 1954, v. 21, № 7, p. 433-449.
134. K o r k e g i R.M. Transition studies and skinfriction measurements on an insulated flat plate at a Mach number of 5.8. - J. Aero. Sci., 1956, v. 23, № 2, p. 97-108.
135. M a t t i n g F.W., C h a p m a n D.R., N y h o l m J.R., T h o m a s A.G. Turbulent skin-friction at high Mach numbers and Reynolds numbers in air and helium. - NASA TR, 1981, № 82.
136. L i p m a n n H.W., D h a w a n C., NACA TN, 1952, № 1117.
137. C h a p m a n D.R., K e s t e r R.M. Measurements of turbulent skin friction on cylinder in axial flow at supersonic and subsonic velocities. - J. Aero. Sci., 1953, v. 20, № 7.
138. W i l s o n R.E. Turbulent boundary layer characteristics at supersonic speed-theory and experiment. - J. Aero. Sci., 1950, v. 17, № 9, p. 585-595.

139. Winkler E.M. Investigation of flat plate hypersonic turbulent boundary layers with heat transfer. — ARC Paper, 1959, № 856.
140. Солодкин Е.Е., Воротников П.П. Турбулентный пограничный слой в сжимаемом газе при отсутствии продольного градиента давления. — Труды ЦАГИ, 1960, № 789.
141. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. — М.: Энергия, 1979.
142. Себеси Т. Метод расчета коэффициента турбулентной теплопроводности и турбулентного числа Прандтля. — Теплопередача, 1973, т. 95, № 2.
143. Meier H.V., Rotta J.C. Experimental and theoretical investigations of temperature distributions in supersonic boundary layer. — AIAA Paper, 1970, № 744.
144. Jenkins R. Variation of the eddy conductivity with Prandtl modulus and its use in prediction of turbulent heat transfer coefficients. — Inst. Heat Transfer Fluid Mech., 1951.
145. Simpson R.L., Whitten D.G., Moffat R.J. An experimental study of the turbulent Prandtl number of air with injection and suction. — Int. J. Heat Mass Transfer, 1970, v. 13, № 1.
146. Сполдинг Д.Б., Чи С.В. Сопротивление в сжимаемом турбулентном пограничном слое на гладкой плоской пластине с теплопередачей и без нее. — Механика. Сб. пер., 1964, № 6.
147. Van Driest E.R. Turbulent boundary layer on a cone in a supersonic flow at zero angle of attack. — J. Aero. Sci., 1952, v. 19, № 1, p. 55–57.
148. Bradfield W.S. Conical turbulent boundary layer experiments and a correlation with flat plate data. — Trans. of the ASME, J. of Heat Transfer, ser. C, 1960, ноя, p. 22–28.
149. Калихман Л.Е. Турбулентный пограничный слой на криволинейной поверхности, обтекаемой газом. — М.: Оборонгиз, 1956.
150. Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. — Л.: Судостроение, 1967.
151. Сибулкин М. Определение турбулентной теплопередачи в звуковой точке тупоносого тела. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер., 1959, № 3.
152. Vaglio-Laurin R. Turbulent heat transfer on blunt nosed bodies in two-dimensional and general three-dimensional hypersonic flow. — J. Aero-Space Sci., 1960, v. 27, № 1.
153. Ван-Дриест Е.Р. Проблема аэродинамического нагрева. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер., 1957, № 5.
154. Воротников П.П. Расчет турбулентного пограничного слоя при отсутствии продольного градиента давления и в окрестности критической точки с учетом реальных свойств воздуха. — Труды ЦАГИ, 1962, № 870.
155. Авдеевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. — Известия АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 4.
156. McLafferty G.H., Barber R.S. The effect of adverse pressure gradients on the characteristics of turbulent boundary layers in supersonic streams. — J. Aero-Space Sci., 1962, v. 29, № 1.
157. Сасмен П.К., Кресчи Р.Дж. Сжимаемый турбулентный пограничный слой с градиентом давления и теплообменом. — Ракетная техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 1.
158. Mager A. Transformation of the compressible turbulent boundary layer. — J. Aero. Sci., 1958, № 5.
159. Eckert E.R.G. Engineering relations for friction and heat transfer to surface in high velocity flow. — J. Aero. Sci., 1955, v. 22, p. 585–586.
160. Шан Дж. С. Сжимаемый турбулентный пограничный слой с градиентом давления. — Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 9.
161. Schultz-Grunow F. Entstehung von Langswirbeln in Grenzschichten. — ZAMM, 1958, v. 38, p. 85–96.
162. Ham F.K. Boundary layer characteristics for smooth and rough surfaces. — Trans. Soc. Naval Architects and Marine Engrs., 1954, v. 62, p. 333–358.

163. Федяевский К.К., Гиневский А.С. Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления. — Журнал технической физики, 1957, т. 27, № 2, с. 309–326.
164. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в газовом потоке при наличии теплопередачи и числе Прандтля, отличном от единицы. — Труды ЛПИ им. М.И.Калинина. — М.—Л.: Машгиз, 1961, № 217.
165. Либби П., Баронти К., Наполитано Л. Исследование несжимаемого турбулентного слоя с продольным градиентом давления. — Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 3.
166. Константинов Н.И. Сравнительное исследование напряжения трения на поверхности тела. — Труды ЛПИ им. М.И.Калинина, 1955, № 176.
167. Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций / Под ред. В.П. Мотулевича, В.В. Ионова. — М.: ИЛ, 1962.
168. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия / Под ред. Е.В. Самуилова, Э.Э. Шпильрайна. — М.: ИЛ, 1959.
169. Агафонов В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. — М.: Машиностроение, 1972.
170. Авдусевский В.С., Галицкий Б.М., Глебов Г.А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. — М.: Машиностроение, 1975.
171. Stetson K.F. Boundary layer transition on blunt bodies with highly cooled boundary layers. — J. Aero-Space Sci., 1960, v. 27, № 2, p. 81–92.
172. Ting-Yi Li, Geiger R.E. Stagnation point of a blunt body in hypersonic flow. — J. Aero. Sci., 1957, v. 24, № 1, p. 25–33.
173. Коробкин И., Грюневальд К. Исследование местной теплоотдачи полусферы в сверхзвуковом ламинарном потоке воздуха при малых тепловых потоках. — В кн.: Проблемы движения головной части ракет дальнего действия (ред. Е.В. Самуилов, Э.Э. Шпильрайн). — М.: ИЛ, 1959.
174. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959.
175. Сибулкин М. Предсказание турбулентной теплопередачи в звуковой точке тела вращения. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер., 1959, № 3.
176. Сафаров Р.А., Тирский Г.А. Турбулентный пограничный слой с теплообменом. — Труды МФТИ, 1972, Серия: Аэромеханика. Процессы управления.
177. Меллор Г. Несжимаемые турбулентные пограничные слои с произвольными градиентами давления. — Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 4, № 9.
178. Кадер Б.А., Яглом А.М. Законы подобия для пристенных турбулентных течений. — Механика жидкости и газа (Итоги науки и техники), 1980, т. 15.
179. Ван-Дриест Е.Р. Турбулентный пограничный слой при различных числах Прандтля. — В кн.: Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи / Под ред. Г.Гертлера, В.Толмина. — М.—Л.: Энергоиздат, 1960.
180. Лейдерман А.Дж. Влияние температуры стенки на сверхзвуковой турбулентный пограничный слой. — Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 7.
181. Уитфилд Д.Л., Хай М.Д. Зависимости температуры от скорости в турбулентных пограничных слоях при числах Прандтля, не равных единице. — Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 14, № 3.
182. Козлов Л.В. Связь аэродинамического нагрева с поверхностным трением. — Известия АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 4.
183. Van-Driest E.R. The problem of aerodynamic heating. — Aeron. Engng Rev., 1956, v. 15, № 10.
184. Arthur P.D., Williams J.C. Maximum turbulent boundary layer heating rates on a hemispherical nose. — ARS Journ., 1960, v. 30, № 2, p. 207–208.

185. Чен К., Тайсон Н. Применение теории турбулентных пятен Эммонса к обтеканию затупленных тел. — Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 5.
186. Perry A.E., Bell J.B., Joubert P.N. Velocity and temperature profiles in adverse pressure gradient turbulent boundary layers. — J. Fluid Mech., 1966, v. 25, pt. 2.
187. Кадер Б.А., Яглом А.М. Применение соображений подобия к расчету замедляющихся турбулентных пограничных слоев. — Доклады АН СССР, 1977, т. 233, № 1.
188. Хидальго Х. О применении метода Ван-Дриста к сильно охлажденному, частично диссоциированному турбулентному пограничному слою. — В кн.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций / Под ред. В.П. Мотулевича и В.П. Ионова. — М.: ИЛ, 1962.
189. Роуз П., Пробстейн Р., Адамс М. Турбулентная теплопередача через сильно охлажденный, частично диссоциированный пограничный слой. — Механика. Сб. пер. 1959, № 4.
190. Гинзбург И.П. Трение и теплопередача при движении смеси газов. — Л.: Изд. ЛГУ, 1975.
191. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — М.: Энергия, 1972.
192. Kostarin S.I., Koshmarov Yu. A. Turbulent boundary layer on a flat plate in a stream of dissociating gas. — Int. J. Heat Mass Transfer, Pergamon Press, 1960, v. 1, p. 46–49.
193. Гинзбург И.П. Турбулентный пограничный слой в сжимаемой жидкости (смеси газов). — Вест. Ленингр. ун-та, 1961, т. 1, с. 75–88.
194. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в диссоциирующем газе. — Журнал технической физики, 1962, т. 32, № 4, с. 473–479.
195. Лапин Ю.В., Сергеев Г.П. Влияние диссоциации на трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое. — Труды ЛПИ им. М.И. Калинина, М.; Л.: Машиностроение, 1964, № 230.
196. Фей Дж., Ридделл Ф. Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом. — В кн.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. / Под ред. В.П. Мотулевича и В.П. Ионова. — М.: ИЛ, 1962.
197. Лайтхилл М. Динамика диссоциирующего газа. Равновесный поток. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер. 1957, № 5, с. 67–75.
198. Суслов О.Н., Тирский Г.А., Щенников В.В. Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля. — Журнал ПМТФ, 1971, № 1, с. 73–89.
199. Лапин Ю.В., Чумаков Ю.С. Турбулентный пограничный слой в многокомпонентном диссоциирующем газе. — Известия АН СССР, МЖТ, 1974, № 4.
200. Лапин Ю.В., Чумаков Ю.С. Турбулентный пограничный слой в многокомпонентных химически реагирующих газах. — В кн.: Турбулентные течения. — М.: Наука, 1977.
201. Дорренс У.Х. Влияние диссоциации на теплоотдачу и поверхностное трение в сжимаемом турбулентном пограничном слое. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер., 1961, № 12.
202. Лапин Ю.В. Влияние каталитической рекомбинации на теплопередачу в замороженном турбулентном пограничном слое. — Труды ЛПИ им. М.И. Калинина. Техническая гидрогазодинамика. — М.; Л.: Машиностроение, 1965, № 248.
203. Сафаров Р.А. Турбулентный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов. — Теплофизика высоких температур, 1975, т. 13, № 2.
204. Сафаров Р.А., Тирский Г.А. Численное исследование диссоциированных и ионизированных пограничных слоев с использованием феноменологичес-

- ких моделей турбулентности. — В кн.: Турбулентные течения. — М.: Наука, 1977.
205. Кульгейн Н.Г. Теплопередача от неравновесного турбулентного пограничного слоя к каталитической поверхности. — Ракетная техника и космонавтика, 1965, т. 3, № 2.
 206. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой на каталитической поверхности в неравновесно диссоциирующем газе. — Известия АН СССР, МЖГ, 1967, № 3, с. 70–76.
 207. Фримен Н. Неравновесное течение идеально диссоциирующего газа. — Механика. Сб. пер., 1959, № 4.
 208. Койчев Ю.Н., Чумаков Ю.С. Влияние процессов переноса в ламинарном подслое на трение и теплообмен в неравновесно диссоциирующем турбулентном пограничном слое. — Известия АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
 209. Penner S.S. Chemistry problems in jet propulsion. — Aeronautical sciences and controlled flight, v. 1. — L.; N.Y.; Paris; Los Angeles: Pergamon Press, 1957.
 210. Годнев И.В. Вычисление термодинамических функций по молекулярным данным. — М.: Гостехиздат, 1956.
 211. Глестон С. Теоретическая химия. — М.: ИЛ, 1950.
 212. Кондратьев В.Н. Кинетика химических газовых реакций. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.
 213. Захарьевский М.С. Кинетика химических реакций. — Л.: ЛГУ им. А.А. Жданова, 1959.
 214. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций. — М.: ИЛ, 1948.
 215. Герни Дж.П. Общие соотношения для поверхностных каталитических реакций. — Ракетная техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 7.
 216. Рей К. Химическая кинетика воздуха при высокой температуре. — В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. — М.: Мир, 1964.
 217. Chung P.M. Chemical reacting nonequilibrium boundary layer. — Advances in Heat Transfer/Ed. Hartnett J.P., Irvine T.F., v.2. — N. Y.; L. Acad. Press, 1965.
 218. Hansen F. Approximation for the thermodynamic and transport properties of high temperature air. — NASA TR, 1959, № 50.
 219. Glass I.L., Takano A. Nonequilibrium expansion flows of dissociated oxygen and ionized argon around a corner. — Progress Aero. Sci., v. 6. — Pergamon Press, 1966.
 220. Лайтхилл М.Дж. Динамика диссоциирующего газа. Часть I. Равновесные потоки. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер., 1957, № 5,6.
 221. Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов А.И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1975.
 222. Гулард Р.Дж. О влиянии скоростей каталитической рекомбинации на теплопередачу при торможении гиперзвукового потока. — Вопросы ракетной техники. Сб. пер., 1959, № 5.
 223. Тирский Г.А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном пограничном слое. — Доклады АН СССР, 1963, т. 155, № 6, с. 1278–1282.
 224. Freedman E., Daiber J.W. Decomposition Rate of nitric oxide between 3000° and 4300° K. — J. Chem. Phys., 1961, v. 34, № 4.
 225. Wray K.L., Teare J.D. Shock-Tube Study of the kinetics of nitric oxide at high temperatures. — J. Chem. Phys., 1962, v. 36, № 10.
 226. Camac M., Feinberg R.M. Formation of NO in Shock-heated air. — Eleventh Symposium on Combustion Held at Univ. of California—The Comb. Inst. Pittsburg, 1967.
 227. Lin S.C., Teare J.D. — Phys. Fluids, 1963, v. 6, № 3.
 228. Equation, tables and charts for compressible flow. — NACA Rep., 1953, № 1135.
 229. Furuja Y., Fujita H. Effect of surface roughness on the velocity defect law. — Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 9, part 2.
 230. Кочерыженков Г.В. Турбулентный пограничный слой в однородном и неоднородном газовых потоках. — Автореферат канд. дис. Л.: ЛГУ, 1971.